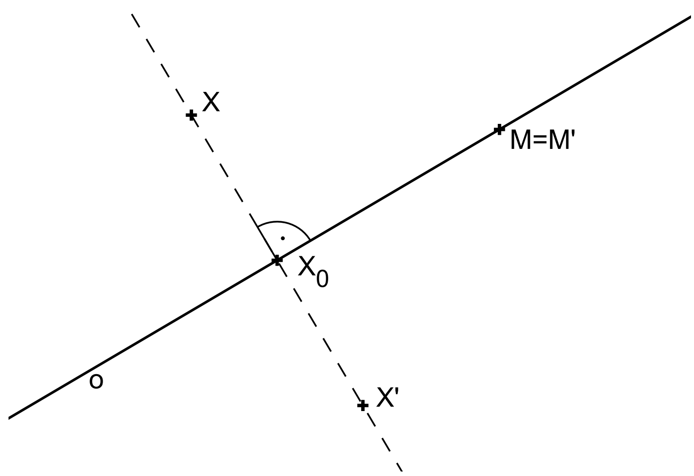
8 Shodnosti v rovině

V této kapitole je podán podrobný přehled šesti shodností v rovině (osová souměrnost, otočení, středová souměrnost, posunutí, posunuté zrcadlení, identita) spolu s řadou úloh na jejich vlastnosti i aplikace. V následující kapitole 9 je potom pojednáno o tom, jak množina těchto shodností i některé její podmnožiny tvoří spolu s operací skládání geometrických zobrazení grupy.

8.1 Osová souměrnost

Definice 19. *Nechť je dána přímka o, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který neleží na přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *o a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*

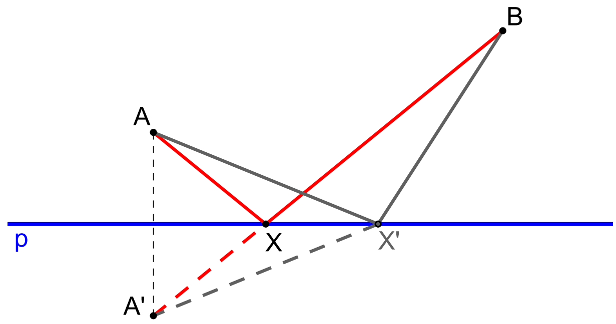


Obrázek 16: Definice osové souměrnosti

Poznámky:
1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 8.1. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

Věta 13. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*



Obrázek 17: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 17

Samodružné body a směry osové souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

Věta 14 (Alternativní definice osové souměrnosti)**.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o.*

Věta 15. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 16. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

Věta 17. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 18. *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathbf{O}(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 8.2. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Řešení: Dle obrázku 18 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.

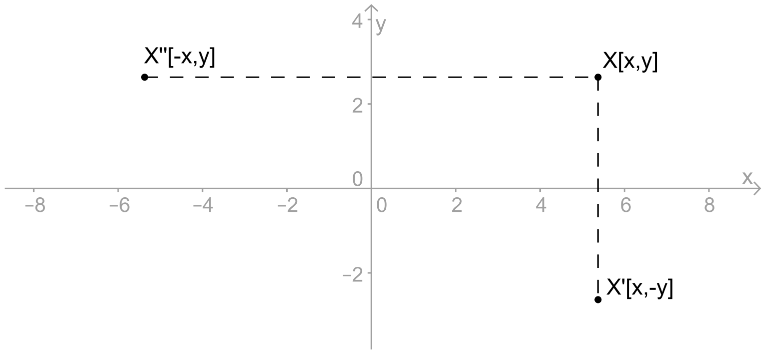
Osová souměrnost s osou x:

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

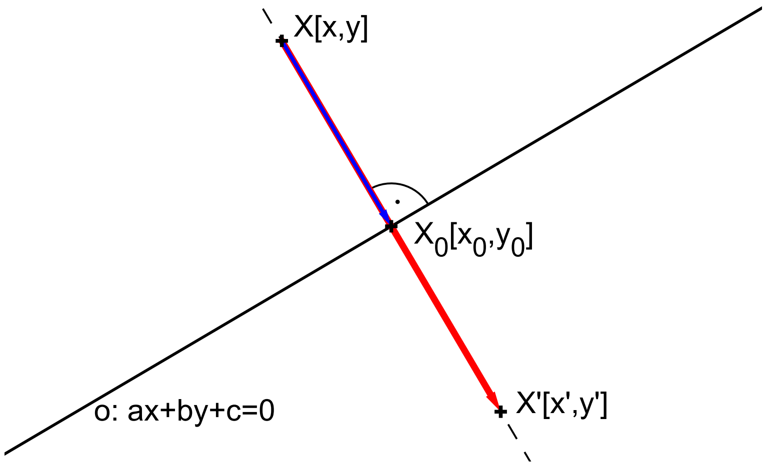
Osová souměrnost s osou y:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.



Obrázek 18: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)



Obrázek 19: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o: ax + by + c = 0$

Dle obrázku 19 platí

$$X' - X = 2(X_0 - X),$$
$$X_0 - X = k(a, b).$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy o: $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 8.3. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky* $p: 3x - 4y + 1 = 0$. *Napište rovnice této souměrnosti.*

Cvičení – Osová souměrnost

4. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o: 2x - 3y + 1 = 0$.

5. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

6. Dokažte Vivianiho větu.

Věta 19 (Vivianiho věta)**.** *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

7. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

8. Řešte **Fagnanův problém**: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

10. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$.

11. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$.

12. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ $(AB \| CD)$, je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

13. Mascheroniova konstrukce. Je dána kružnice $k(S;r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka.

14. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

15. Dokažte následující větu

Věta 20. *V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.*

16. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

17. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

18. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

19. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

20. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

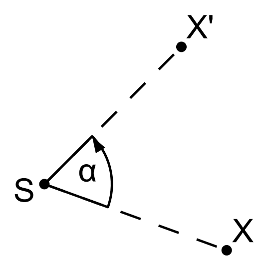
21. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

22. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

23. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

8.2 Otočení

Definice 20. Otočení *neboli* **rotace** *je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ. Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.*



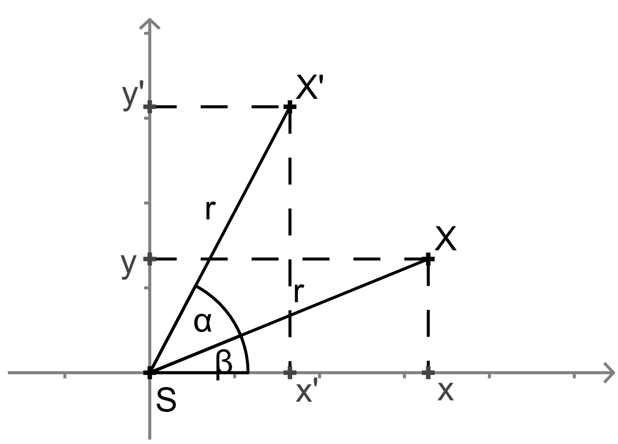
Obrázek 20: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

Věta 21 (Alternativní definice otočení)**.** *Shodnost s právě jedním samodružným bodem S je otočením; bod S je střed otočení.*

PŘÍKLAD 8.4. *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α. Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

Řešení: Postupujeme podle obrázku 21.



Obrázek 21: Otočení $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel α kolem počátku jsou

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Věta 22. *Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.*

Věta 23. *Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

Věta 24. *Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α.*

Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$
\begin{aligned}
x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1 \\
y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2
\end{aligned}
$$

Po úpravě dostaneme:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha \\
y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 8.5. *Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

Cvičení – Otočení

24. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD. Určete otočeení, které zobrazí A na C a B na D. **[2]**

25. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d.

26. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A, který leží na přímce a. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c.

27. Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod A ($|SA| = 1.5cm$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A.

28. Je dána kružnice $k(S; r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem $60°$.

Otočení - Úlohy na domácí přípravu

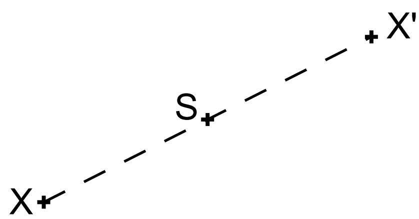
29. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b.

30. Jsou dány kružnice k, přímka p a bod A ležící vně k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p.

31. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

8.3 Středová souměrnost

Definice 21. Středová souměrnost *se středem* S *je shodné zobrazení, které bodu* S *přiřazuje týž bod* S *a libovolnému bodu* $X \neq S$ *přiřazuje bod* X' *tak, že bod* S' *je středem úsečky* XX'*. Zobrazení značíme* $\mathcal{S}(S)$*.*



Obrázek 22: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace $\mathbf{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = \pi$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$.

Vlastnosti středové souměrnosti:

1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S; jedna z os je volitelná.

2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os).

3) Je jednoznačně určena svým středem

4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).

5) Středová souměrnost je *přímá shodnost.*

6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed S, a všechny směry samodružné.

Věta 25. *V souměrnosti podle středu* S *je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem* S *je samodružná.*

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ **v rovině**

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$
\begin{aligned}
x' &= -x + 2s_1 \\
y' &= -y + 2s_2
\end{aligned}
$$

Věta 26. *Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.*

Cvičení – Středová souměrnost

32. Je dána kružnice $k(O;r)$ a přímka p, která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S, který leží uvnitř poloroviny pO. Sestrojte úsečku se středem S, která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p.

33. Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P, který leží vně kružnice k, veďte přímku p, která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP.

34. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY.

35. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4cm, b = 7cm$.

36. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45°, \beta = 60°$.

37. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech Q a R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

38. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.

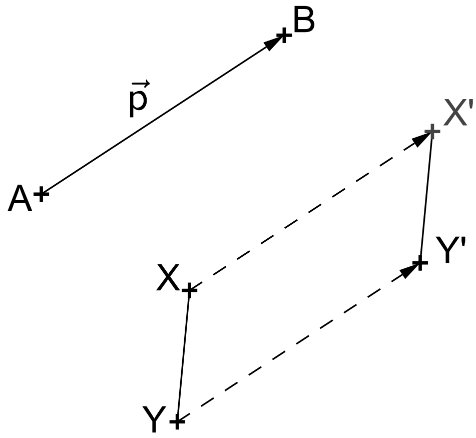
39. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.

40. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY.

41. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4.5cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6cm$.

8.4 Posunutí

Definice 22. *Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$.* **Posunutí** *neboli* **translace** *je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.*



Obrázek 23: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Poznámka. Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

Věta 27. *Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

Věta 28. *Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).*

Věta 29. *Nechť X' je obraz libovolného (proměnného) bodu X v dané translaci* **T**. *Pak všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné.*

Analytické vyjádření posunutí T($\vec{p}$) v rovině

Rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

PŘÍKLAD 8.6. *Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?*

Cvičení – Posunutí

42. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.

43. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle ADC| = \delta$.

44. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d.

45. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC.

46. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.

47. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

48. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r.

8.5 Posunuté zrcadlení

PŘÍKLAD 8.7. *Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX| + |XY| + |YB|$ byl co nejmenší.*

Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osové souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou soměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

– osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,

– otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,

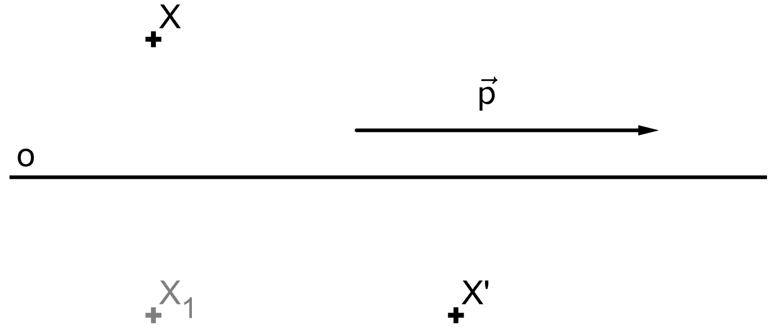
– středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,

– identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností.**

Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

Definice 23. *Je dána přímka o. Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá posunuté zrcadlení (též posunutá souměrnost).*



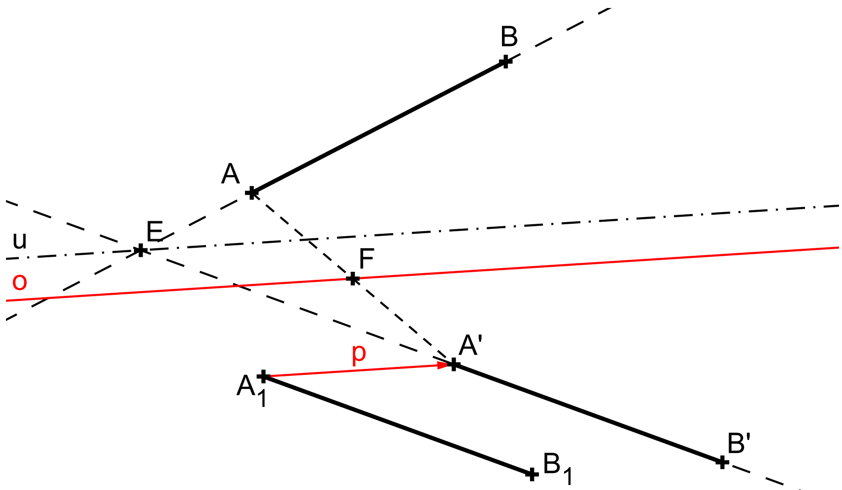
Obrázek 24: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \to X'$

Věta 30. *Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.*

Věta 31. *Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.*

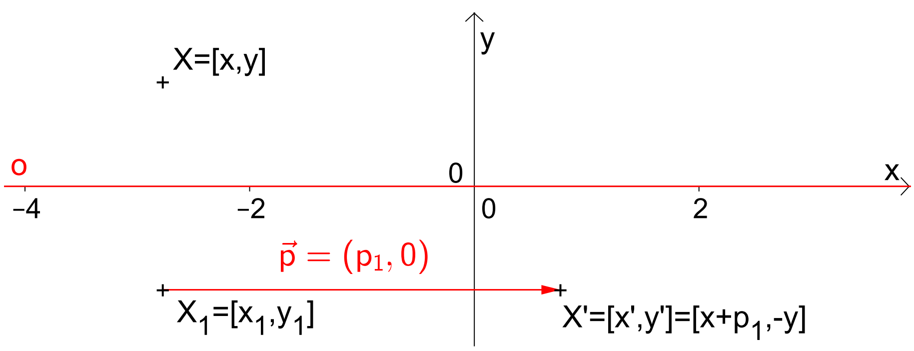
PŘÍKLAD 8.8. *Nechť AB, $A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A, B po řadě v body A', B'.*

Řešení:



Obrázek 25: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z}: AB \to A'B'$

Analytické vyjádření posunutého zrcadlení



Obrázek 26: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z}: X \to X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = (p_1, 0)$ (viz Obr. 26)

$$\mathcal{Z}: \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Cvičení – Posunuté zrcadlení

49. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a, B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

a) $XY \| p$, kde p je daná přímka; **[1]**

b) $XY = d$, kde d je předem daná úsečka; **[1]**

c) střed úsečky XY ležel na dané přímce q. **[1]**