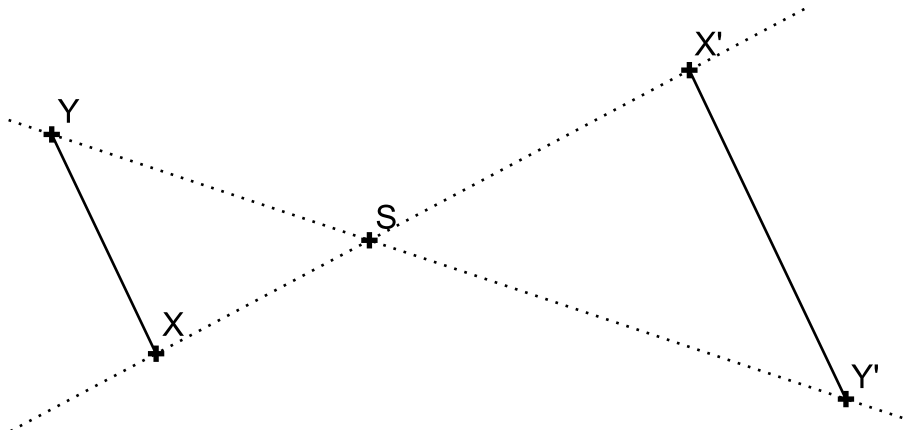


11 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

Definice 26. Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost** $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$



Obrázek 29: Stejnolehlost $H(S, \kappa = -1.5)$

Poznámka. Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost** $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,
2. Pro $X \neq S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,
 pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce \overrightarrow{SX} a
 pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k \overrightarrow{SX} .

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnoolehlosti $H(S; \kappa)$ je stejnoolehlost $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$.

Základní vlastnosti stejnoolehlosti $H(S, \kappa)$:

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

PŘÍKLAD 11.1. Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.

11.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti $H(S; \kappa)$: $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$.

PŘÍKLAD 11.2. Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny \mathbf{A}_2 , která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 = 4/3, s2 = 1/3, s3 = 1/3]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [4/3, 1/3, 1/3]
```

11.2 Skládání stejnolehlostí

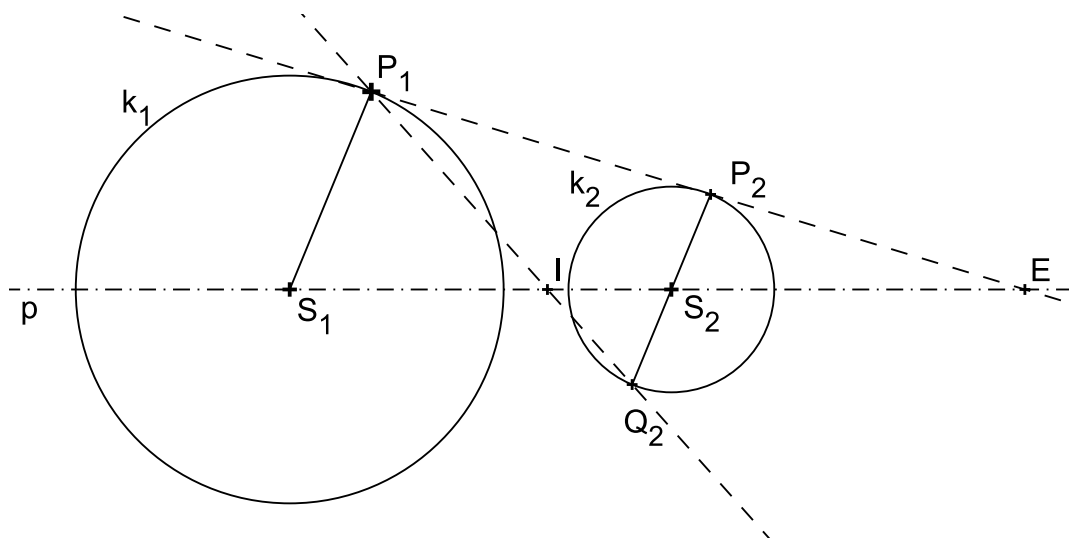
Věta 46 (O skládání stejnolehlosti a translace). Zobrazení složené ze stejnolehlosti $H(S; \kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnolehlost $H'(Q; \kappa)$, kde $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$.

Věta 47 (O skládání stejnolehlostí). Složením dvou stejnolehlostí $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne

1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,
2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,
3. STEJNOLEHLOST $H(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, jestliže $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. Přitom, pro $S_1 = S_2$ je také $S = S_1 = S_2$, pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce S_1S_2 .

11.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2 : $H_1(E, r_2/r_1)$ a $H_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T , je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 30: Stejnolehlost kružnic

Věta 48 (Mongeova věta). Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:

- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

PŘÍKLAD 11.3. Je dána kružnice k , přímka p , která je vnější přímkou kružnice k , a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k .

PŘÍKLAD 11.4. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M , který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b .

PŘÍKLAD 11.5. Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k .

PŘÍKLAD 11.6. (Eulerova přímka) V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.

PŘÍKLAD 11.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA . Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1 . Dokažte:

- 1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV .
- 2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV , pokud $S \neq V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S .
- 3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

PŘÍKLAD 11.8. Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?

11.4 Cvičení – Stejnolehlost

62. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.

63. Je dána přímka p , kružnice k a bod A . Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p, Y \in k, A \in XY, |AY| = 3|AX|$.

64. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k .

65. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

a) $v_a = 5\text{cm}$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

b) α, β, v_c ,

c) α, β, t_c ,

d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60^\circ$, $t_c = 6\text{cm}$.

Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

66. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti. [2]

67. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětiny kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$. [1]

68. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC . Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$. [2]