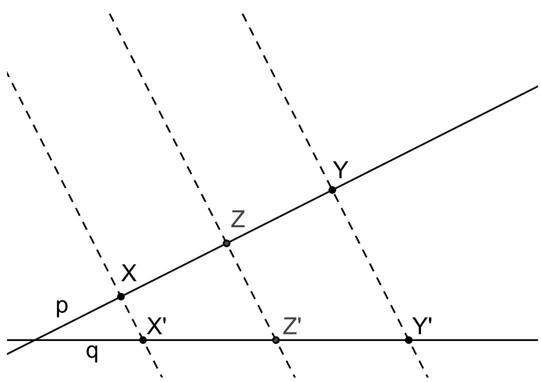
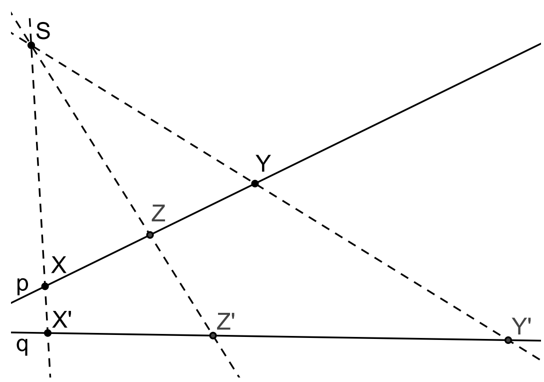
4 Dvojpoměr

Pro každé geometrické zobrazení jsou typické určité vlastnosti, které se při něm zachovávají. Hovoříme o tzv. *invariantech* daného geometrického zobrazení. Pro shodné zobrazení je to např. vzdálenost bodů, pro podobné zobrazení poměr vzdáleností bodů, pro afinní zobrazení je to potom dělicí poměr. Nyní nás bude zajímat projektivní invariant (tj. vlastnost, která se zachovává např. při středovém promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami v trojrozměrném prostoru, nebo mezi dvěma různoběžnými přímkami v rovině). Jak je patrné z Obr. 16, dělicí poměr to být nemůže. Ukáže se, že tímto invariantem je tzv. *dvojpoměr* (viz věta 12–Pappova věta o projektivní invariantnosti dvojpoměru). Dvojpoměrem $(ABCD)$ čtyř různých kolineárních bodů rozumíme poměr dělicích poměrů $(ABC)/(ABD)$ (viz následující definice 5). Pro podrobnější studium otázek invariantů geometrických zobrazení, zvláště pak dvojpoměru, lze doporučit [6].

Výše uvedené úvahy o invariantech můžeme shrnout takto:

- vzdálenost – metrický (eukleidovský) invariant,
- dělicí poměr – afinní invariant,
- dvojpoměr – projektivní invariant.





Obrázek 16: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými přímkami (rovinami) na rozdíl od rovnoběžného nezachovává dělicí poměr (sledujte, jak se zobrazuje bod Z, střed úsečky XY).

Definice 5 (Dvojpoměr)**.** *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo* $\delta = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ *nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.*

Poznámka. Zápisem (ABC), resp. (ABD), rozumíme dělicí poměr bodu C, resp. D, vzhledem k bodům A, B.

PŘÍKLAD 4.1. *Na přímce p jsou dány body A, B. Sestrojte na přímce p bod C tak, aby dělicí poměr $(ABC) = \lambda$ byl roven danému číslu.*

a) $\lambda = 3$,

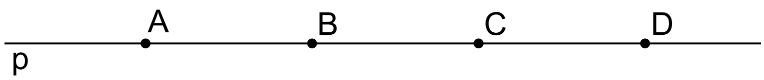
b) $\lambda = \frac{1}{2}$,

c) $\lambda = -2$.

PŘÍKLAD 4.2. *Určete hodnoty dělicích poměrů* (ABC_∞), $(AB_\infty C)$, $(A_\infty BC)$, *kde* $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ *jsou nevlastní body.*

Řešení: $(ABC_\infty) = 1,\ (AB_\infty C) = 0,\ (A_\infty BC = \infty)$.

PŘÍKLAD 4.3. *Jak vidíme na Obr. 17, na přímce* p *jsou ve stejných vzdálenostech postupně umístěny body* A, B, C, D*. Určete hodnotu dvojpoměru* $(ABCD)$.



Obrázek 17: Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.

Věta 9. *Dvojpoměr čtyř bodů se nezmění, vyměníme-li vzájemně dva z nich a zároveň ještě oba zbývající, t.j. platí* $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 5. □

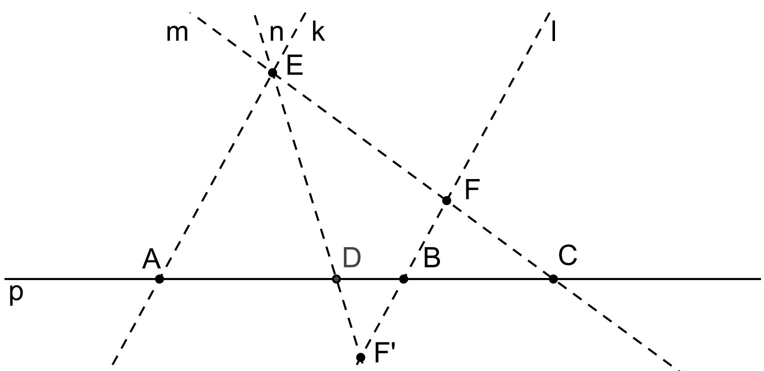
Věta 10. *Vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, t.j. platí* $(ABCD) = \dfrac{1}{(ABDC)}$.

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 5. □

Definice 6 (Harmonická čtveřice)**.** *Je-li* $(ABCD) = -1$*, říkáme, že body* A, B, C, D *tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že body* C, D *jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům* A, B*, nebo že body* C, D *oddělují harmonicky body* A, B.

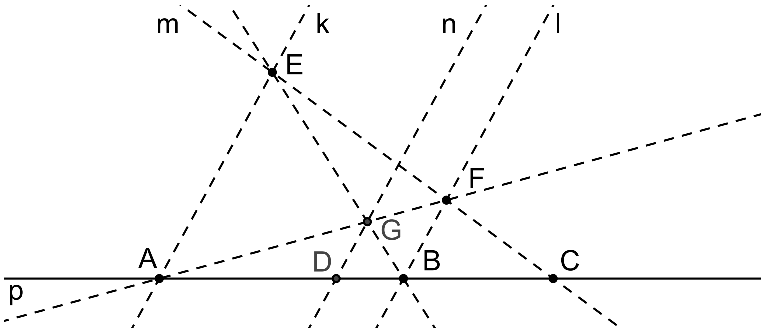
PŘÍKLAD 4.4. *Jsou-li na přímce dány body* A, B, C*, sestrojte bod* D *tak, aby* A, B, C, D *tvořily harmonickou čtveřici.*

Řešení: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice, založená na podobnosti trojúhelníků, je zobrazena na Obr. 18. Vyjdeme z ní při hledání postupu konstrukce, který by byl projektivně inva-



Obrázek 18: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice

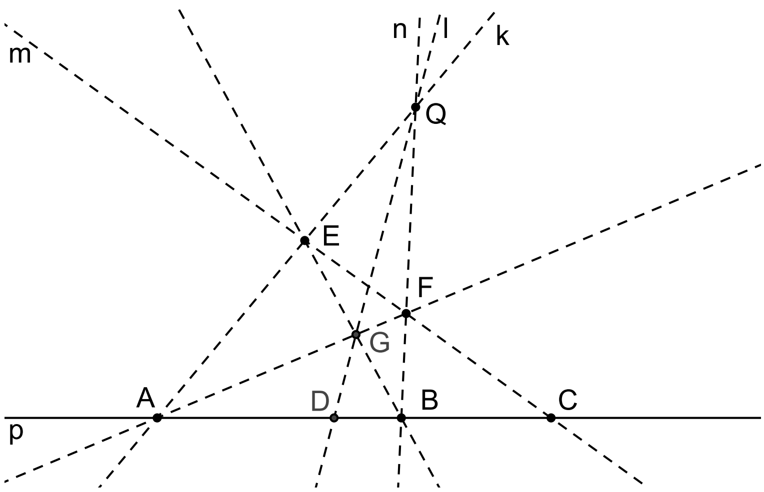
riantní (neměl by být založen na rovnoběžnosti).



Obrázek 19: Další z možných konstrukcí harmonické čtveřice

Konstrukci nejprve modifikujeme (viz Obr. 19) tak, že dvojicemi bodů A, F a B, E vedeme přímky, jejichž průsečíkem G následně vedeme rovnoběžku n s přímkami k, l. Průsečíkem přímek n a p je potom hledaný bod D.

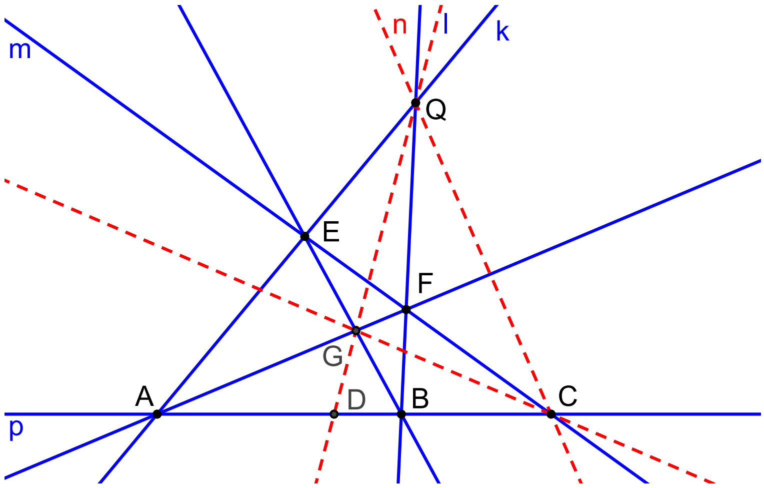
Nyní zbývá nahradit nevlastní průsečík přímek k, l, n vlastním bodem Q. Výsledkem je konstrukce na Obr. 20, která je ekvivalentní s původní a přitom při ní nemusíme využívat rovnoběžnost. Postup této konstrukce je takový, že bodem C vedeme libovolnou přímku m, na ní zvolíme dva různé body E, F a vedeme jimi přímky $k = AE$ a $n = BF$, jejichž průsečík nazveme Q. Bod D je potom určen jako průsečík přímek p a $l = QG$, kde G je průsečíkem přímek AF a BE.



Obrázek 20: Jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice

Body A, B, F, E na Obr. 20 (viz též Obr. Fig:UplnyCtyr) tvoří tzv. *úplný čtyřroh.* Takto nazýváme skupinu čtyř bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Body A, B, F, E potom nazýváme *vrcholy úplného čtyřrohu.* Šest přímek, které tyto vrcholy spojují, nazýváme *stranami úplného čtyřrohu.* Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech G, C, Q, jimž říkáme *diagonální vrcholy úplného čtyřrohu*; trojúhelník jimi určený se nazývá *diagonální trojúhelník* a jeho strany *diagonálními stranami úplného čtyřrohu.* Nalezená jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice potom odráží *harmonickou vlastnost* úplného čtyřrohu, která je formulována v následující větě, více viz [4].

Věta 11. *Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy a dvojice bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou, dvě dvojice bodů, které se harmonicky oddělují.*



Obrázek 21: Úplný čtyřroh A, B, F, E a diagonální trojúhelník $\triangle GCQ$.

Poznámka. Tvrzení, že body A, B, C, D (viz Obr. 20 a 21) se harmonicky oddělují znamená, že pro dvojpoměr těchto bodů v uvedeném pořadí platí $(ABCD) = -1$.

PŘÍKLAD 4.5. *V P_2 jsou dány body $A = (1, 2, 3), B = (3, 2, 1), C = (1, 1, 1)$. Dokažte, že leží na přímce a vypočtěte bod D tak aby $(ABCD) = -1$.*

PŘÍKLAD 4.6. *Střed úsečky AB je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky, určené body A, B, vzhledem k bodům A, B. Dokažte.*