8 Křivky v E_3

Diferenciální geometrie využívá ke studiu křivek a ploch metody *diferenciálního počtu.* Nyní se seznámíme s vybranými pojmy a postupy diferenciální geometrie prostorových křivek.

8.1 Popis křivky

Křivku v prostoru E_3 budeme popisovat *parametricky*, stejně, jako popisujeme přímku. Křivku tak chápeme jako množinu bodů

$$X = [x(t), y(t), z(t)], \tag{22}$$

kde parametr t probíhá nějaký interval I. Přitom předpokládáme, že funkce $x(t), y(t)$ a $z(t)$ mají spojité derivace řádu aspoň $r \geq 1$ a jejich první derivace podle t, které značíme $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, nejsou pro žádné $t \in I$ všechny rovny nule (tj. $\dot{X}(t) \neq \vec{o}$ pro všechna $t \in I$).

Konkrétní bod křivky tak dostaneme dosazením konkrétní hodnoty za parametr t.

Rovnici (22), kterou můžeme stručně zapsat jako $X = X(t)$, nazýváme *bodovou rovnicí* křivky k. Pokud místo bodu X křivky uvažujeme jeho *průvodič* (též *polohový vektor* nebo *rádiusvektor*) $\vec{x}$, můžeme křivku zapsat rovnicí

$$\vec{x} = (x(t), y(t), z(t)), \tag{23}$$

kterou nazýváme rovnicí *vektorovou.* Pokud rovnici (22), resp. rovnici (23) rozepíšeme po souřadnicích, dostaneme *parametrické rovnice křivky k*

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \tag{24}$$

Poznámka. Derivaci podle parametru křivky značíme tečkou, první derivaci jednou tečkou, druhou derivaci potom dvěma tečkami. Platí tedy $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}, \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Bod křivky, v němž nejsou všechny derivace $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ zároveň rovny nule a jemuž odpovídá jediná hodnota $t \in I$ (tj. neexistují dvě různé hodnoty t, jimž by odpovídal tento jeden bod), nazýváme *regulárním bodem* křivky. Každý bod, který nesplňuje tato kritéria, nazýváme *singulárním bodem.* Pokud některý bod přísluší několika různým hodnotám $t \in I$, nazýváme ho *vícenásobným bodem.*

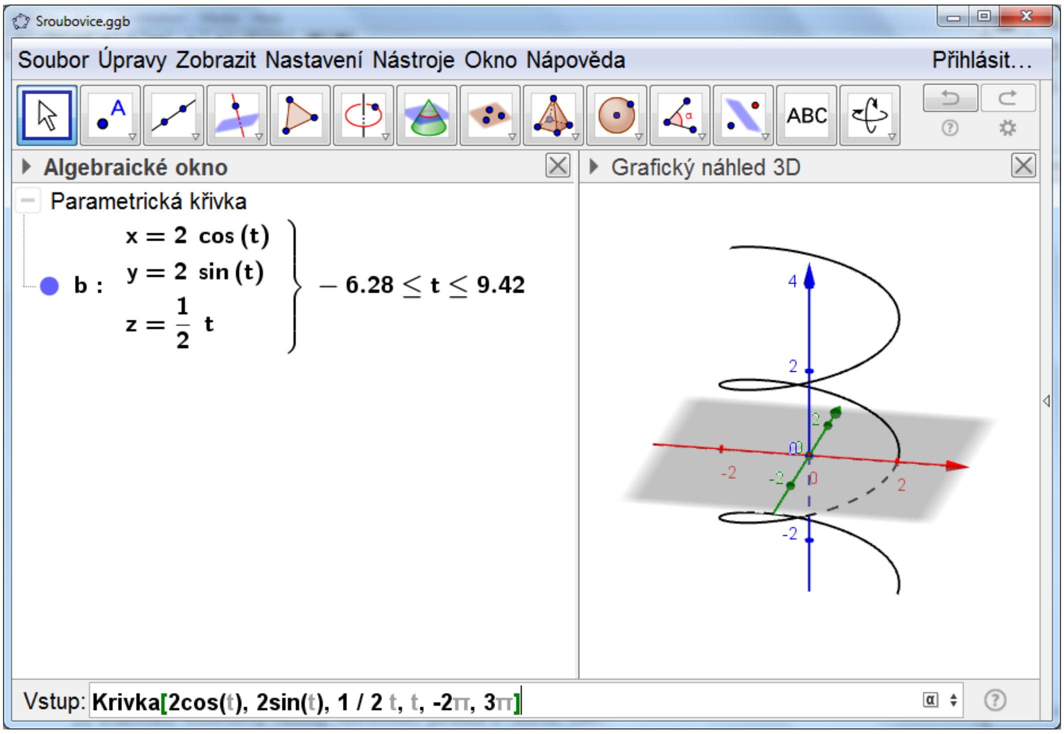
Příkladem prostorové křivky je *šroubovice*

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt;\ \ t \in (-\infty, \infty), \tag{25}$$

kde $a, b \in R$; a je poloměr válcové plochy, po níž se šroubovice odvíjí, b je tzv. *redukovaná výška závitu* (výška jednoho závitu je rovna $2\pi b$).

PŘÍKLAD 8.1. *Zobrazte šroubovici danou bodovou rovnicí* $X = [2\cos t, 2\sin t, \frac{1}{2}t]$ *pro* $t \in \langle -2\pi, 3\pi \rangle$.

Řešení: Použijeme program GeoGebra, konkrétně jeho prostředí *Grafický náhled 3D.* Do vstupního řádku zadáme příkaz `Krivka[2 cos(t),2 sin(t), 1/2 t,t,-2 pi,3 pi]`. Výsledek viz Obr. 48.



Obrázek 48: Zobrazení šroubovice v GeoGebře

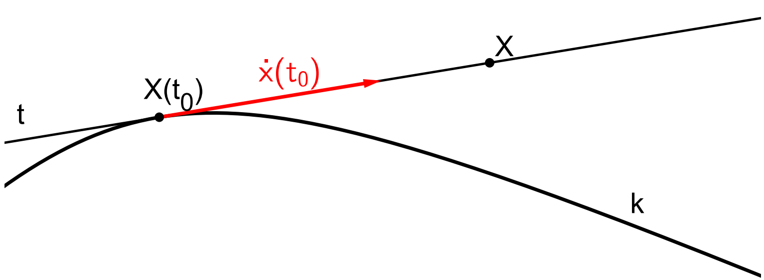
PŘÍKLAD 8.2. *Zobrazte Vivianiho křivku, danou bodovou rovnicí* $X = [1+\cos t, \sin t, 2\sin t/2]$*, pro* $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

8.2 Tečna křivky

Při zápisu tečny křivky k dané rovnicí $X = X(t)$ v bodě $X(t_0)$ použijeme parametrické vyjádření přímky. Tečnu chápeme jako přímku danou bodem $X(t_0)$ a směrovým vektorem $\dot{x}(t_0)$ (který nazýváme *tečným vektorem* křivky k v bodě $X(t_0)$), viz Obr. 49. Parametrické vyjádření tečny křivky k v bodě $X(t_0)$ má potom tvar

$$X = X(t_0) + \alpha \dot{x}(t_0); \ \alpha \in R, \tag{26}$$

kde α je reálný parametr.



Obrázek 49: Tečna křivky k v bodě $X(t_0)$

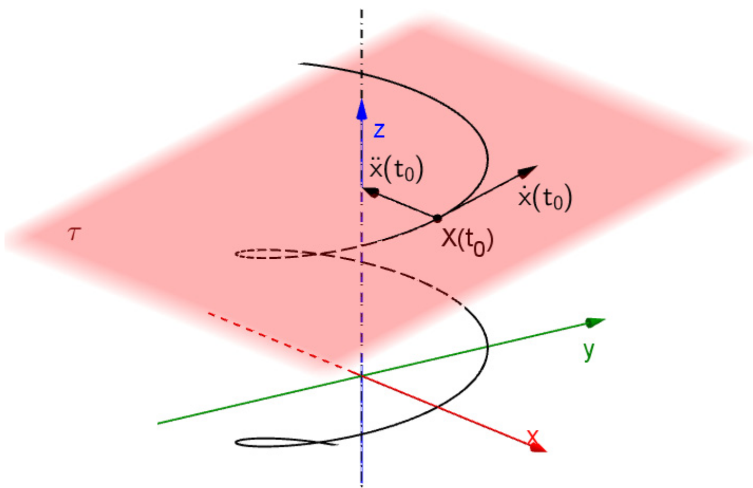
PŘÍKLAD 8.3. *Napište rovnici tečny šroubovice* $X = [a\cos t, a\sin t, bt]$ *v bodě* $X(\pi)$.

Řešení: Nejprve vyjádříme potřebné prvky rovnice: $X(\pi) = [-a, 0, b\pi]$, $\dot{x}(t) = [-a \sin t, a \cos t, b]$, $\dot{x}(\pi) = [0, -a, b]$. Příslušnou tečnu potom můžeme zapsat parametrickou rovnicí $X = [-a, 0, b\pi] + \alpha[0, -a, b]$; $\alpha \in R$, bodovou rovnicí $X = [-a, -a\alpha, b\pi + \alpha b]$ (vektorovou zapíšeme analogicky), případně parametrickými rovnicemi $x = -a,\ y = -a\alpha,\ z = b\pi + \alpha b; \alpha \in R$.

Poznámka. Křivku, která má v každém bodě jedinou tečnu spojitě se měnící s parametrem, nazýváme *hladkou.* Stejným způsobem můžeme zavést pojem *hladká část* dané křivky. Pokud se křivka skládá z hladkých částí, nazýváme ji *křivkou po částech hladkou.* [13]

8.3 Oskulační rovina

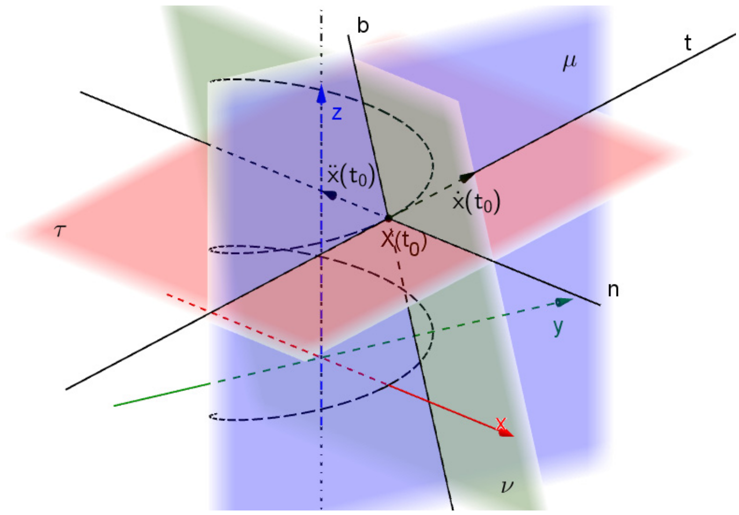
Křivku v prostoru E_3 si můžeme představit jako trajektorii hmotného bodu. Jeho pohyb je tak popsán (vektorovou) rovnicí křivky $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Přitom vektor $\dot{\vec{x}}(t)$ chápeme jako *vektor okamžité rychlosti v čase t*, který má vždy směr tečny (je to *tečný vektor křivky*). Vektor $\ddot{\vec{x}}(t)$ potom představuje *vektor okamžitého zrychlení v čase t*. Počátečním bodem obou těchto vektorů je příslušný hmotný bod (tj. bod křivky). Pokud jsou vektory $\dot{\vec{x}}(t)$ a $\ddot{\vec{x}}(t)$ lineárně závislé, nazýváme příslušný bod křivky *inflexním bodem.* V ostatních bodech, které nazýváme *neinflexní*, jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Každému neinflexnímu bodu $X(t_0)$ křivky k tak můžeme přiřadit rovinu, která je určena tímto bodem a různoběžnými vektory $\dot{\vec{x}}(t_0), \ddot{\vec{x}}(t_0)$. Tuto rovinu nazýváme *oskulační rovinou* křivky k v bodě $X(t_0)$, značíme ji τ, viz Obr. 50.



Obrázek 50: Oskulační rovina τ šroubovice $X = [2\cos t, 2\sin t, \frac{1}{2}t]$ v bodě $X(2\pi)$

Poznámka. V případě šroubovice na Obr. 50 je vektor $\ddot{\vec{x}}(t)$ kolmý na tečný vektor $\dot{\vec{x}}(t)$. Poznamenejme, že se jedná o speciální případ. Obecně, v případě jiných křivek, mohou tyto vektory svírat rozličné úhly (Víme, že v případě inflexního bodu jsou rovnoběžné).

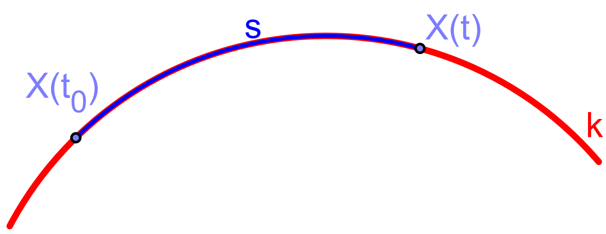
Vedle tečny t se směrovým vektorem $\dot{\vec{x}}(t)$ zavádíme v bodě X křivky k ještě další dvě význačné přímky a následně ještě tři roviny těmito přímkami určené, viz Obr. 51. Jedná se o přímku n, která leží v oskulační rovině τ a je kolmá k tečně t, a o přímku b, která prochází bodem X kolmo na τ. Přímku n nazýváme *hlavní normálou* křivky k v bodě X, přímku b potom *binormálou* křivky k v bodě X. Rovinu přímek n, b označujeme ν a nazýváme ji *normálovou rovinou* křivky k v bodě X. Rovinu přímek t, b označujeme μ a nazýváme ji *rektifikační rovinou* křivky k v bodě X.



Obrázek 51: Tečna t, hlavní normála n, binormála b, oskulační rovina τ, normálová rovina ν a rektifikační rovina μ šroubovice $X = [2\cos t, 2\sin t, \frac{1}{2}t]$ v bodě $X(t_0)$ ($t_0 = 2\pi$)

8.4 Oblouk křivky

Představme si, že na křivce zvolíme pevný bod $X(t_0)$ (tj. bod, jemuž odpovídá libovolná, pevně zvolená hodnota parametru t_0). Délku křivky měřenou od tohoto bodu nazýváme *obloukem křivky*, viz oblouk s na Obr. 52 (ukazuje se, že je výhodné použít oblouk jako parametr křivky).



Obrázek 52: Oblouk křivky k

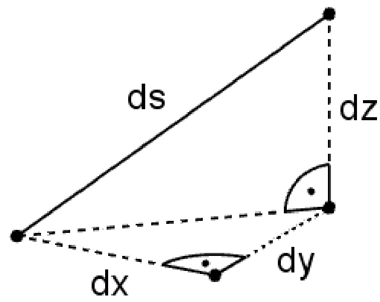
V definici oblouku tak figuruje známý vztah z integrálního počtu pro výpočet délky křivky (naše křivka k) mezi dvěma body (v našem případě se jedná o body $X(t_0)$ a $X(t)$).

Definice 10 (Oblouk křivky)**.** *Předpokládejme, že křivka k je dána vektorovou rovnicí $\vec{x} = \vec{x}(t); t \in I$. Potom funkci*

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{27}$$

nazýváme obloukem křivky k od bodu $t_0 \in I$ do bodu $t \in I$.

Poznámka. Připomeňme si ve stručnosti hlavní myšlenku odvození vztahu pro výpočet délky křivky. Oblouk s si představíme rozdělený na nekonečně malé elementy, každý z nich nahradíme úsečkou délky $\mathrm{d}s$ (diferenciál). Tuto délku potom vyjádříme vztahem $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$, kde $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ jsou odpovídající přírůstky (diferenciály) jednotlivých souřadnicových funkcí $x(t), y(t), z(t)$, viz Obr. 53 (jedná se vlastně o dvojí postupné použití Pythagorovy věty). S vědomím toho, že uvedený vztah



Obrázek 53: Nekonečně malý element oblouku s

použijeme v kontextu určitého integrálu, formálně ho upravíme do tvaru $\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}}\,\mathrm{d}t$, který už zřetelně koresponduje s formulí 27.

Oblouk se často používá jako parametr křivky. K přechodu od původního parametru t k novému parametru s použijeme funkci $s = s(t)$ (použijeme ji jako tzv. *přípustnou funkci*). Ta je na příslušném intervalu I vždy prostá (je rostoucí). Proto k ní na I existuje funkce inverzní $t = t(s)$, kterou když dosadíme do rovnice (bodové, vektorové, parametrických rovnic) křivky za t, stane se tato rovnice závislá na s, [1]. Tuto proceduru ilustruje následující příklad.

PŘÍKLAD 8.4. *Na křivce dané rovnicí* $X = [2\cos t, 2\sin t, \sqrt{5}t]; \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ *zaveďte nový parametr, který je obloukem.*

Řešení: Nejprve určíme *přípustnou* funkci $s = s(t)$:

$$s = \int_0^t \sqrt{4\sin t^2 + 4\cos t^2 + 5} = 3t. \tag{28}$$

Potom stačí do dané rovnice šroubovice dosadit za t výraz $\frac{s}{3}$ a náležitě upravit meze intervalu, v němž se pohybují hodnoty nového intervalu s. Dostaneme $X = [2\cos\frac{s}{3}, 2\sin\frac{s}{3}, \sqrt{5}\frac{s}{3}]; \quad t \in \langle -3\pi, 3\pi \rangle$.

8.5 První křivost křivky

Nyní budeme uvažovat, že parametrem křivky je oblouk s. Místo rovnice $X = X(t)$ tak pracujeme s rovnicí $X = X(s)$. Pro detailní seznámení s důsledky tohoto přechodu, na které zde není prostor, lze doporučit [1] a [13].

Z toho, jak byl oblouk zaveden, vyplývá, délka křivky mezi dvěma jejími body $X(s_1)$ a $X(s_2)$ je přímo rovna rozdílu $s_2 - s_1$. Proto se říká, že oblouk „měří křivku“.

Pro parametr s zavedeme vektory analogické vektorům $\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)$. Pro odlišení od běžného parametru budeme derivaci podle oblouku s místo tečkami značit čárkami, tj. $\vec{x}'(s), \vec{x}''(s)$.

Definice 11 (První křivost). *Pro křivku k danou vektorovou rovnicí $\vec{x} = \vec{x}(s); s \in I$, kde s je obloukem, nazýváme vektor $\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$ vektorem tečny křivky k v bodě $X(s)$ a vektor $\vec{x}''(s)$ vektorem první křivosti křivky k v bodě $X(s)$. Číslo ${}^1k(s) = |\vec{x}''(s)|$ nazýváme první křivostí (též flexí) křivky k v bodě $X(s)$. Funkce ${}^1k$, která každému bodu křivky k přiřazuje jeho křivost, je tzv. první křivost křivky.*

Poznámka. První křivost je významnou charakteristikou křivky. Její převrácená hodnota je rovna poloměru oskulační kružnice křivky v příslušném bodě (oskulační kružnice viz str. 51).

Ještě poznamenejme, že zatímco vektor $\vec{x}''(s)$ určuje svou velikostí první křivost křivky, velikost vektoru tečny $\vec{x}'(s)$ je vždy rovna 1 (tj. vektor tečny je vždy jednotkovým vektorem) [1].

Pro vektor $\vec{x}''(s)$ platí následující věta (viz [1], str. 200).

Věta 24. *Bod křivky je inflexním bodem právě tehdy, jestliže první křivost v tomto bodě je rovna nule. Jestliže je daný bod neinflexním bodem křivky, potom vektor první křivosti tohoto bodu je nenulovým vektorem, který je kolmý na vektor tečny tohoto bodu.*

Pokud je první křivost křivky rovna nule v každém jejím bodě, jedná se o přímku nebo její část.

8.6 Frenetův trojhran

Nyní završíme přehled charakteristik křivky v jejím daném bodě zavedením pojmu *Frenetův trojhran* (viz [1], str. 201) (*J. F. Frenet* (1816–1900), francouzský matematik).

Definice 12 (Frenetův trojhran)**.** *Předpokládejme, že $X(s)$ je neinflexní bod křivky k. Potom vektory*

$$\vec{t}(s) = \vec{x}'(s), \quad \vec{n}(s) = \frac{\vec{x}''(s)}{|\vec{x}''(s)|}, \quad \vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \tag{29}$$

nazýváme postupně vektorem tečny, vektorem hlavní normály a vektorem binormály křivky k v bodě $X(s)$. Uspořádanou trojici vektorů

$$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)) \tag{30}$$

nazýváme Frenetovým trojhranem křivky k v bodě $X(s)$.

Poznámka. Je zřejmé, že vektory $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ jsou jednotkové a navzájem kolmé. Jejich orientace je přitom souhlasná s uspořádanou trojicí jednotkových souřadnicových vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Frenetův trojhran tvoří ortonormální bázi. Tuto skutečnost využíváme v kinematické geometrii při popisu pohybu v trojrozměrném prostoru.

Věta 25 (Frenetovy vzorce)**.** *Pro vektorové funkce $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, které určují v každém bodě křivky k příslušný Frenetův trojhran, platí následující vztahy (tzv. Frenetovy vzorce):*

$$\begin{aligned} \vec{t}' &= & {}^1k\vec{n}, & \\ \vec{n}' &= -{}^1k\vec{t} & & +{}^2k\vec{b}, \\ \vec{b}' &= & -{}^2k\vec{n}, & \end{aligned} \tag{31}$$

kde reálná funkce ${}^1k$ je první křivost křivky k a reálná funkce ${}^2k$ je tzv. druhá křivost (též torze) křivky k.

Poznámka. První křivost ${}^1k$ jsme definovali na str. 49, pojem *druhé křivosti* ${}^2k$ je však zaveden až výše uvedenými Frenetovými vzorci (31). Zatímco první křivost vyjadřuje míru vychýlení křivky od tečny, druhou křivost můžeme chápat jako míru pro odchýlení (vykroucení) křivky z její oskulační roviny [1].

Jestliže má křivka bez inflexních bodů v každém svém bodě druhou křivost rovnou nule, jedná se o rovinnou křivku. Poznamenejme, že v případě takovéto křivky jsou Frenetovy vzorce obzvláště jednoduché: $\vec{t}' =^1 k\vec{n}, \ \vec{n}' = -^1k\vec{t}$.

8.7 Oskulační kružnice

Pro snazší zavedení pojmu *oskulační kružnice* nejprve pojednáme o povaze styku (dotyku), který mohou mít dvě křivky ve svém společném bodě. Hovoříme o styku $q-$tého řádu (ekvivalentně o styku $(q+1)-$bodovém). Pro minimální řád styku je určující nejvyšší řád derivace rovnic obou křivek, která je pro ně společná.

Uvažujme křivky k, l o rovnicích $k = k(s)$, $l = l(s)$. Potom nutnou a postačující podmínkou, aby měly ve společném bodě $X(s_0)$ (tj. odpovídá mu hodnota parametru s_0) styk nejméně $q-$tého řádu (tj. styk $(q+1)-$bodový), je splnění rovnic

$$k(s_0) = l(s_0), \quad k'(s_0) = l'(s_0), \quad \ldots, k^{(q)}(s_0) = l^{(q)}(s_0). \tag{32}$$

Dvě protínající se křivky k, l mají styk nultého řádu, tj. jednobodový, protože pro ně platí $k(s) = l(s)$, ale $k'(s) \neq l'(s)$.

Dvě křivky, které mají ve společném bodě společnou tečnu (u prostorových křivek také tečné roviny), mají v tomto bodě styk nejméně prvního řádu, tj. dvojbodový. Více o styku dvou křivek viz [13].

Definice 13 (Oskulační kružnice)**.** *Kružnici m nazýváme oskulační kružnicí křivky kv jejím bodě X_0, jestliže mají obě křivky v bodě X_0 styk alespoň druhého řádu.*

Vlastnosti oskulační kružnice specifikuje následující věta (viz [1], str. 210).

Věta 26. *Nechť X_0 je neinflexní bod křivky k. Potom existuje právě jedna oskulační kružnice m křivky k v bodě X_0 a má tyto vlastnosti:*

1. *Kružnice m leží v oskulační rovině křivky k v bodě X_0, prochází bodem X_0 a má v něm s křivkou k společnou tečnu.*
2. *Poloměr kružnice m je roven převrácené hodnotě první křivosti ${}^1k$ křivky k v bodě X_0.*
3. *Střed oskulační kružnice leží na hlavní normále sestrojené ke křivce k v bodě X_0, a to na polopřímce určené bodem X_0 a vektorem normály tohoto bodu.*

Důkaz. Viz [1], str. 210. □