5 Pappova věta a její důsledky

Pappos z Alexandrie (?290–?350), řecký matematik a astronom. Pod označením „Pappova věta“ je uváděno více vět. Proto je třeba uvést, o jaké z těchto vět hovoříme. Zde se budeme věnovat *Pappově větě o invarianci dvojpoměru při promítání.* Přestože je dvojpoměr invariantní vůči rovnoběžnému i středovému promítání, omezíme se zde pouze na středové promítání. Vůči rovnoběžnému promítání je invariantní i dělicí poměr. Později uvedeme ještě *Pappovu větu o šestiúhelníku.*

5.1 Středové promítání

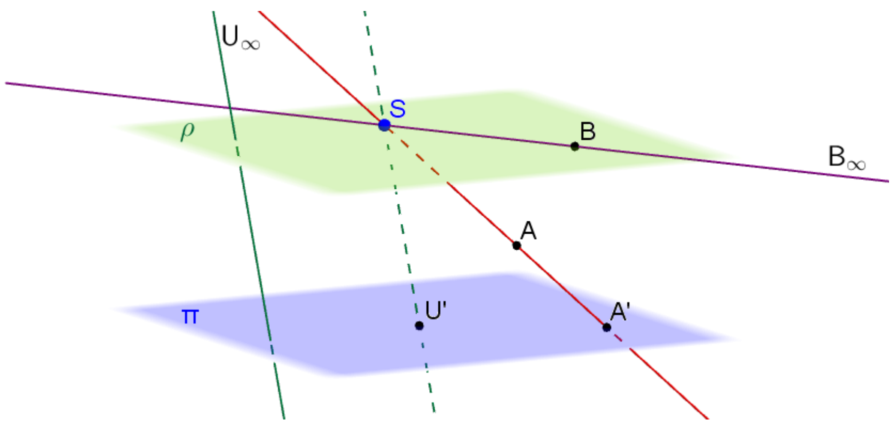
Středové promítání patří mezi zobrazení zvaná *kolineace.* Kolineace je nejobecnějším možným zobrazením, které zachovává linearitu geometrických útvarů, [1].

Existují různé druhy kolineací. Zanedlouho se budeme zabývat *středovou kolineací*, známou např. z kurzů deskriptivní geometrie.

Uvažujeme středové promítání v prostoru $\bar{E}_2$ nebo v prostoru $\bar{E}_3$. Nejprve si probereme podobu středových průmětů základních útvarů při středovém promítání prostoru $\bar{E}_3$ do roviny π se středem S ($S \notin \pi$).

Zobrazení bodu

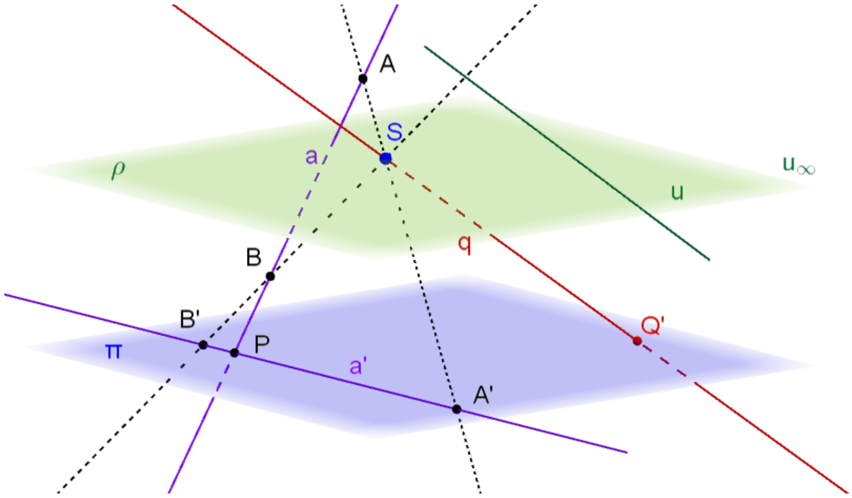
Viz Obr. 22. Vlastní bod se zobrazí opět na vlastní bod ($A \to A'$), nebo, pokud leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π, zobrazí se na nevlastní bod ($B \to B'_\infty$). Nevlastní bod (tj. směr přímky v $\bar{E}_3$) se zobrazí na vlastní bod, tzv. *úběžník* ($U_\infty \to U'$), nebo, pokud přímka leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π, zobrazí se sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.



Obrázek 22: Středové průměty bodu v $\bar{E}_3$.

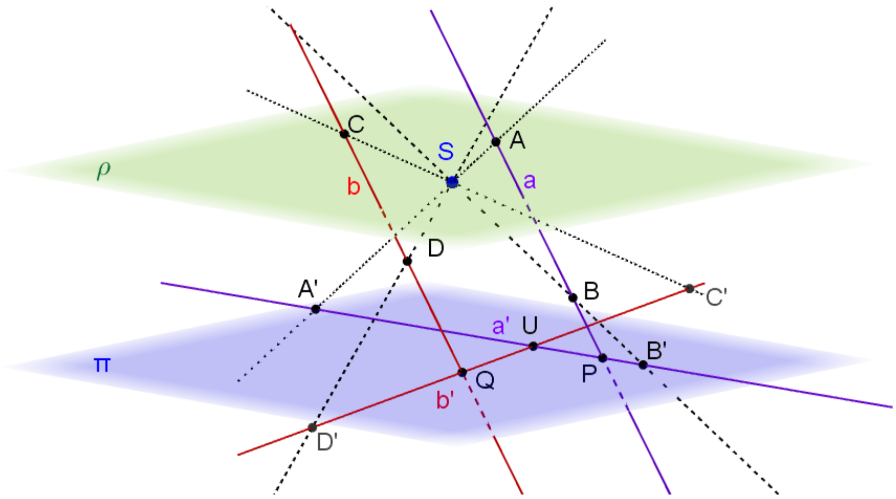
Zobrazení přímky

Viz Obr. 23. Přímka se zobrazí opět na přímku ($a \to a'$, bod P je samodružný, nazýváme ho *stopník* dané přímky), nebo, pokud je přímkou promítací, tj. prochází středem S, zobrazí se na bod ($q \to Q'$). Přímka ležící v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π se potom zobrazí na nevlastní přímku roviny π ($u \to u_\infty$) sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.



Obrázek 23: Středové průměty přímky v $\bar{E}_3$.

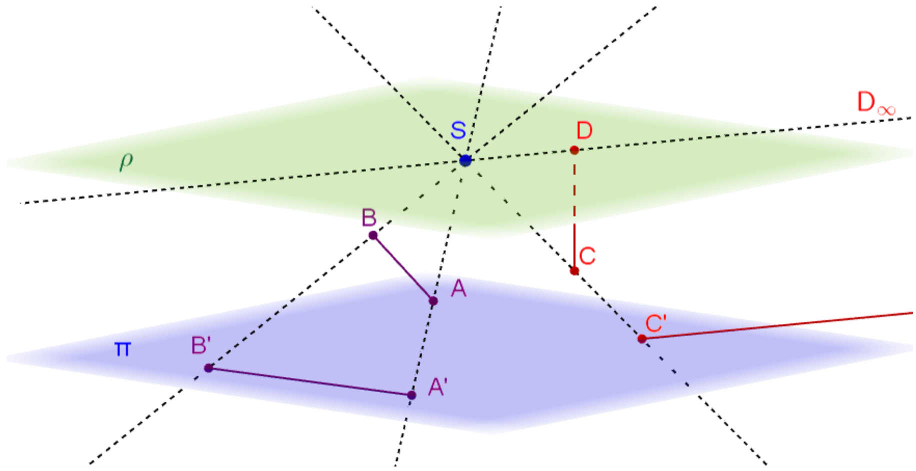
Zajímavá je otázka, jak vypadají středové průměty dvou rovnoběžek. Jak dokumentuje Obr. 24, středovými průměty dvou rovnoběžek jsou obecně dvě různoběžky ($a \to a', b \to b'; a \parallel b, a' \nparallel b'$), jejichž společným bodem je *úběžník* (bod U' na Obr. 24), obraz nevlastního bodu (směru) těchto rovnoběžek.



Obrázek 24: Středové průměty rovnoběžek v $\bar{E}_3$ nejsou rovnoběžné.

Zobrazení úsečky

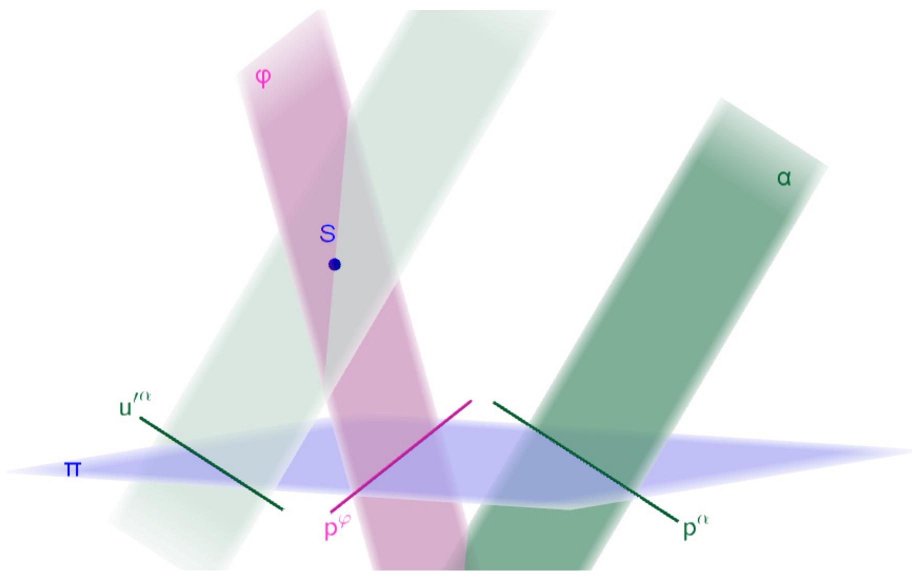
Poznamenejme pouze, že obrazem úsečky ve středovém promítání nemusí být úsečka. Jak vidíme na Obr. 25, úsečka AB v obecné poloze se zobrazí na úsečku $A'B'$, zatímco úsečka DC, která je kolmá k průmětně π a jejíž jeden krajní bod D leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π, se zobrazuje na polopřímku s počátečním bodem D', jejíž směr je dle orientace uvedené na obrázku určen nevlastním obrazem D_∞ bodu D.



Obrázek 25: Středové průměty bodu v $\bar{E}_3$.

Zobrazení roviny

Viz Obr. 26. Pokud je rovina promítací, tj. prochází bodem S, je jejím středovým průmětem přímka, její stopa ($\varphi \to p^{\varphi}$). V obecném případě je pak středovým průmětem roviny celá průmětna π ($\alpha \to \pi$). Průsečnici roviny s průmětnou nazýváme *stopou* roviny (přímky p^{α} a p^{φ} na obrázku). Nevlastní přímka roviny se promítá do tzv. *úběžnice*. Úběžnicí rovniny α je přímka u'^{α}.

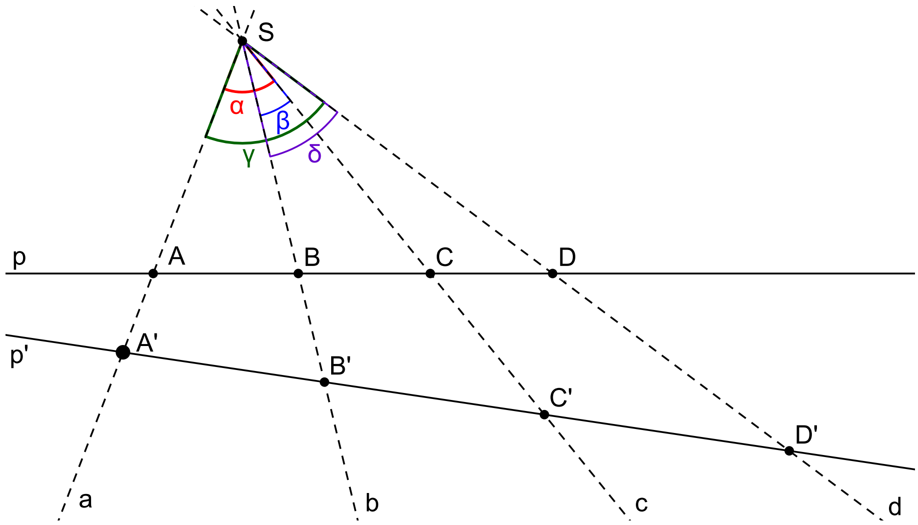


Obrázek 26: Středové průměty roviny v $\bar{E}_3$.

5.2 Pappova věta o invarianci dvojpoměru

Věta 12 (Pappova věta o invarianci dvojpoměru)**.** *Jestliže jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku $p' \neq p$, potom $(A'B'C'D') = (ABCD)$.*

Důkaz. Jak bylo již řečeno, omezíme se pouze na středové promítání. Důkaz invariance dvojpoměru vůči rovnoběžnému promítání přenecháváme laskavému čtenáři.



Obrázek 27: Pappova věta.

Důkaz naznačíme pro konfiguraci bodů A, B, C, D dle Obr. 27. Diskusi obecné platnosti přenecháme čtenáři pro samostatnou práci.

Nebudeme dokazovat přímo rovnost $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Dokážeme, že hodnota dvojpoměru čtyř bodů na přímce p, resp. p', závisí pouze na úhlech, které svírají přímky spojující tyto body se středem S (úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na Obr. 27). Protože tak nezávisí na umístění přímky p, je při zachování velikostí uvedených úhlů pro všechny její polohy tento dvojpoměr stejný.

Pro dvojpoměr $(ABCD)$ platí

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}, \tag{6}$$

kde uvedené dělicí poměry můžeme vzhledem k Obr. 27 zapsat takto

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|}. \tag{7}$$

Nyní provedeme ekvivalentní úpravy těchto rovností (7) tak, aby se v nich „objevily“ vztahy pro výpočet obsahů vybraných trojúhelníků, které tvoří body A, B, C, D, S na Obr. 27 (konkrétně se jedná o $\triangle ACS, \triangle BCS, \triangle BDS$ a $\triangle CDS$):

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|v}{\frac{1}{2}|BC|v} = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\frac{1}{2}|AD|v}{\frac{1}{2}|BD|v} = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}}, \tag{8}$$

kde v je společná výška těchto trojúhelníků, tj. kolmá vzdálenost bodu S od přímky p.

Nyní vyjádříme každý z uvedených obsahů trojúhelníků za použití jiných základen a výšek

$$S_{\triangle ACS} = \frac{1}{2}|AS||SC|\sin\alpha, \quad S_{\triangle BCS} = \frac{1}{2}|BS||SC|\sin\beta, \tag{9}$$

$$S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}|AS||SD|\sin\gamma, \quad S_{\triangle BDS} = \frac{1}{2}|BS||SD|\sin\delta. \tag{10}$$

a dosadíme do vztahů (8)

$$(ABC) = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SC|\sin\alpha}{\frac{1}{2}|BS||SC|\sin\beta} = \frac{|AS|\sin\alpha}{|BS|\sin\beta}, \tag{11}$$

$$(ABD) = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SD|\sin\gamma}{\frac{1}{2}|BS||SD|\sin\delta} = \frac{|AS|\sin\gamma}{|BS|\sin\delta}, \tag{12}$$

zjednodušené tvary pak do (13)

$$(ABCD) = \frac{\dfrac{|AS|\sin\alpha}{|BS|\sin\beta}}{\dfrac{|AS|\sin\gamma}{|BS|\sin\delta}}, \tag{13}$$

abychom po zjednodušení dostali vztah

$$(ABCD) = \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin\beta\sin\gamma}, \tag{14}$$

ze kterého vyplývá nezávislost hodnoty dvojpoměru $(ABCD)$ na volbě přímky p. Je tedy

$$(ABCD) = (A'B'C'D'). \tag{15}$$

□

Pappovu větu můžeme formulovat i jednodušším způsobem.

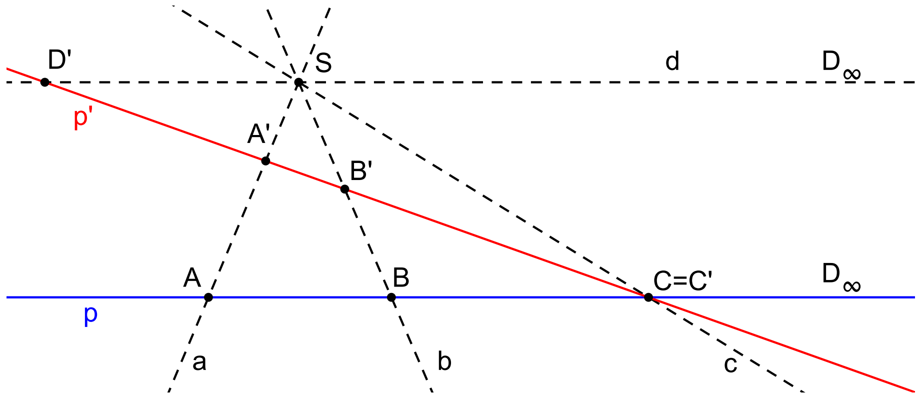
Věta 13 (Pappova věta o invarianci dvojpoměru II)**.** *Dvojpoměr se promítáním nemění.*

Poznámka. Pappova věta o invarianci dvojpoměru platí i v případě, že je jeden z uvažovaných bodů nevlastní. Například pro D_∞ (viz Obr. 28) platí

$$(ABCD_\infty) = (ABC). \tag{16}$$

Postup důkazu tohoto vztahu je analogický s důkazem věty 12. Jak ukazuje Obr. 28, body A, B, C, D_∞, kde D_∞ je nevlastní, leží na přímce p. Je však třeba mít na paměti, že pro jinou přímku, např. p' dle Obr. 28, mohou být všechny čtyři body A', B', C', D' vlastní.

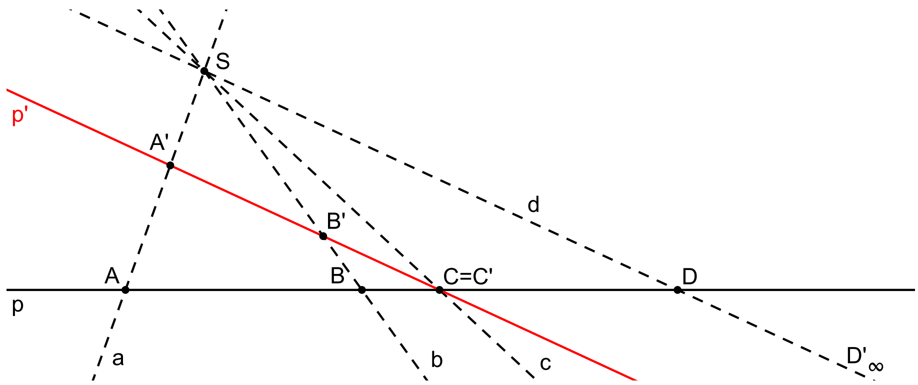
Skutečnost uvedenou v poslední poznámce můžeme výhodně využít při řešení následujícího příkladu.



Obrázek 28: Pappova věta pro nevlastní bod.

PŘÍKLAD 5.1. *Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = \mu$, kde μ je dané číslo.*

Řešení: Viz Obr. 29. Vyjdeme z toho, že platí $(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C')$. Nejprve sestrojíme (libovolnou) přímku p' procházející bodem $C = C'$, na ní potom zvolíme body A', B' tak, aby platilo $(A'B'C') = \mu$. Jako průsečík přímek AA', BB' dostaneme střed S, kterým vedeme rovnoběžku s p'. Jejím průsečíkem s p je hledaný bod D.



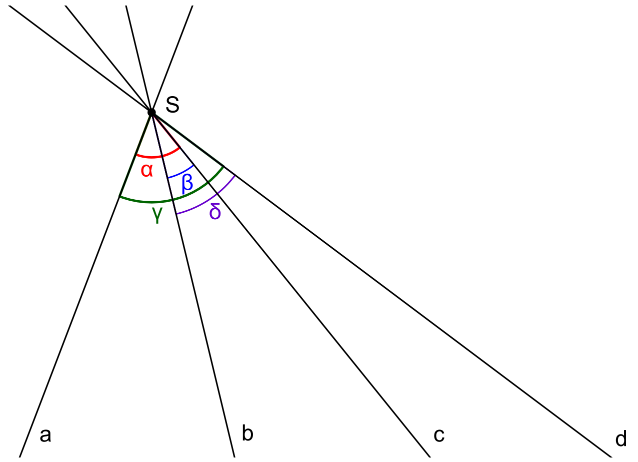
Obrázek 29: Konstrukce daného dvojpoměru.

Dvojpoměr čtyř přímek

Z výše uvedeného důkazu Pappovy věty (Věty 12) vyplývá, že pravdivost jejího tvrzení závisí pouze na zachování velikostí úhlů mezi promítacími přímkami a, b, c, d, viz Obr. 27. Místo dvojpoměru čtveřice bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce p tak můžeme klidně uvažovat dvojpoměr čtveřice přímek a, b, c, d procházejících jedním bodem S, viz Obr. 30. Zaměnili jsme tedy body za přímky a přímky za body, a dostali jsme opět smysluplný vztah. To je projevem tzv. *principu duality v projektivní rovině*, kterému se věnujeme v následující kapitole 5.3.

Pro dvojpoměr čtyř přímek a, b, c, d z Obr. 27 a 30 zřejmě platí

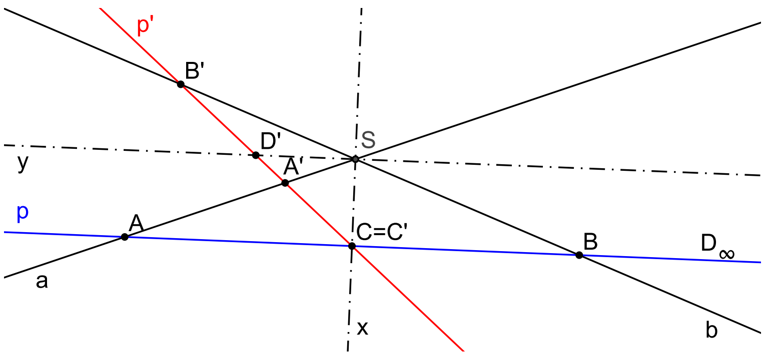
$$(abcd) = (ABCD) = \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\sin\beta \sin\gamma}. \tag{17}$$



Obrázek 30: Dvojpoměr čtyř přímek.

PŘÍKLAD 5.2. *Určete hodnotu* $(abxy)$, *jsou-li* a, b *dvě různoběžné přímky a* x, y *osy souměrnosti úhlů, které přímky* a, b *svírají.*

Řešení: Viz Obr. 31. Je zřejmé, že platí $(abxy) = -1$.



Obrázek 31: Dvojpoměr dvou různoběžek a os jejich úhlů.

Analogicky s dvojpoměrem čtyř přímek zavedeme dvojpoměr čtyř nevlastních bodů a dvojpoměr čtyř rovin.

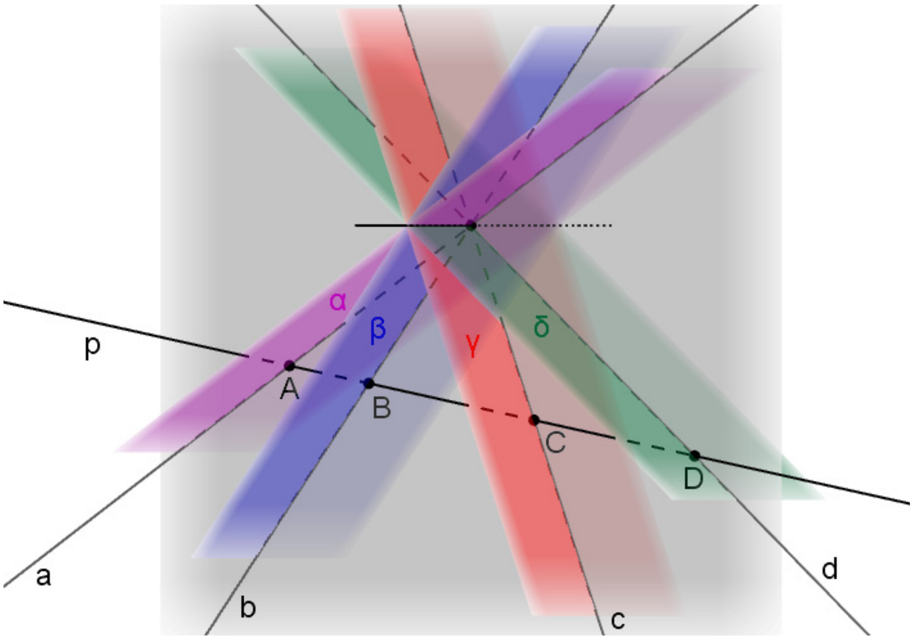
Dvojpoměr čtyř nevlastních bodů

$$(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) = (abcd).$$

Dvojpoměr čtyř rovin

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Viz Obr. 32.



Obrázek 32: Dvojpoměr čtyř rovin.

5.3 Princip duality v projektivní rovině

Z každé věty v rovinné projektivní geometrii dostaneme novou správnou větu, když v ní příslušné pojmy nahradíme pojmy s nimi duálními, například slovo „bod“ nahradíme slovem „přímka“ a slovo „přímka“ nahradíme slovem „bod“, přičemž incidenci zachováme. Kompletní přehled vzájemně duálních pojmů a tvrzení nabízí následující tabulka 1. Vzájemnými záměnami uvedených pojmů vznikají dvojice „navzájem duálních vět“.

bod	přímka
leží na	prochází
přímka spojující dva body	průsečík dvou přímek
přímky procházející jedním bodem	body ležící na jedné přímce
čtyřroh	čtyřstran
pól	polára
množina bodů dané vlastnosti	obálka
tečna	bod dotyku

Tabulka 1: Vzájemně duální pojmy, [2]

Ukázka dvojice navzájem duálních vět:

Věta 1: Dvěma různými body prochází jediná přímka.

Věta 2: Dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

Poznámka. Dualizovat nelze vzdálenost a úhel.

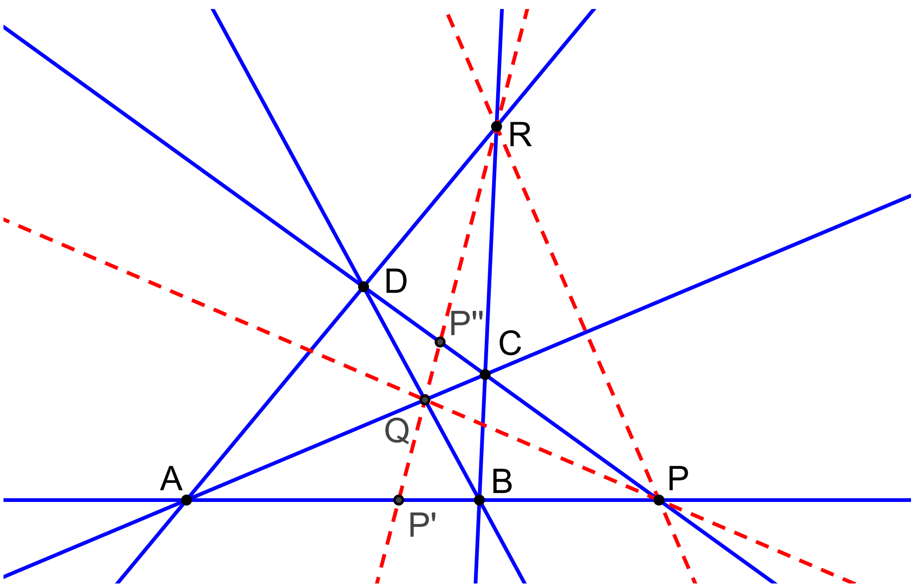
5.4 Princip duality v praxi

Uplatnění principu duality ilustrují také dvě následující vzájemně duální definice – definice úplného čtyřrohu (viz Obr. 33) a definice úplného čtyřstranu.

Definice 7 (Úplný čtyřroh)**.** *Skupina čtyř bodů A, B, C, D v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá* **úplný čtyřroh** *A, B, C, D. Body A, B, C, D se nazývají jeho* **vrcholy***. Šest přímek, z nichž každá je incidentní se dvěma z těchto vrcholů, nazýváme* **stranami** *úplného čtyřrohu A, B, C, D. Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech P, Q, R, jimž říkáme* **diagonální vrcholy** *úplného čtyřrohu; trojúhelník jimi určený se nazývá* **diagonální trojúhelník** *a jeho strany* **diagonálními stranami** *úplného čtyřrohu A, B, C, D.*

Definice 8 (Úplný čtyřstran)**.** *Skupina čtyř přímek a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá* **úplný čtyřstran** *a, b, c, d. Přímky a, b, c, d se nazývají jeho* **strany***. Šest bodů, z nichž každý je incidentní se dvěma z těchto stran, nazýváme* **vrcholy** *úplného čtyřstranu a, b, c, d. Tyto vrcholy lze spojit ještě dalšími třemi přímkami p, q, r, jimž říkáme* **diagonální strany***; trojúhelník jimi určený se nazývá* **diagonální trojúhelník** *a jeho vrcholy pak* **diagonálními vrcholy** *úplného čtyřstranu a, b, c, d.*

Věta 14. *Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy (viz Obr. 33, body A, B) a pár bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou (viz Obr. 33, body P', P''), dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují harmonicky.*



Obrázek 33: Úplný čtyřroh.

Důkaz. Uvažujme nejprve středové promítání se středem R, potom se st5edem Q. Dostaneme

$$(DCPP'') = (ABPP'), \quad (DCPP'') = (BAPP'), \tag{18}$$

odkud plyne

$$(ABPP') = (BAPP') = \frac{1}{(ABPP')}, \tag{19}$$

tj.

$$(ABPP')^2 = 1. \tag{20}$$

Protože body P a P' jsou odděleny bodem B, musí být dvojpoměr $(ABPP')$ záporný. Výsledkem odmocnění (20) je tedy rovnost

$$(ABPP') = -1. \tag{21}$$

Tím je věta dokázána. □

Věta 14 nám dovoluje konstruovat harmonickou čtveřici jednoduše pomocí úplného čtyřrohu, jak jsme uvedli již na str. 20.

5.5 Cvičení – Pappova věta a princip duality

1. K větě 14 vyslovte větu **duální** a tu **dokažte**.

2. Dvě protější strany úplného čtyřrohu jsou harmonicky sdruženy vzhledem k příslušným diagonálním stranám. Dokažte.

3. Ke konstrukci harmonické čtveřice bodů (doplnit D, známe-li A, B, C) vymyslete konstrukci duální, tj. konstrukci harmonické čtveřice přímek.