# 9 Vybrané rovinné křivky

## 9.1 Obalová křivka

**PŘÍKLAD 9.1.** *Za určitých okolností můžeme na dně dobře umytého hrnečku nebo na hladině nápoje v něm pozorovat křivku podobnou srdci (viz obr. 54). Jaká je podstata tohoto jevu? Můžeme odvodit rovnici pozorované křivky?*

Obrázek 54: : Srdce ve sklenici

Dotyčná křivka je polovinou křivky zvané *nefroida*. Vzniká jako obálka světelných paprsků odražených od vnitřní stěny nádoby. Tím se řadí do rodiny tzv. *kaustik*. Geometrickou podstatu vzniku této křivky snadno modelujeme v programu GeoGebra. K vykreslení systému odražených paprsků, jejichž je nefroida obálkou, využijeme zobrazení stopy polopřímky, která je modelem odraženého paprsku. Při plynulém pohybu bodem dopadu $I$ (viz Obr. 55a) podél kružnice znázorňující vnitřní stěnu nádoby (po jeho uchopení ukazatelem myši) se potom na *Nákresně* zobrazuje celý systém odražených paprsků a vznik výsledné křivky jako jejich „obálky“ je zřejmý. Výsledek vidíme na Obr. 55b.

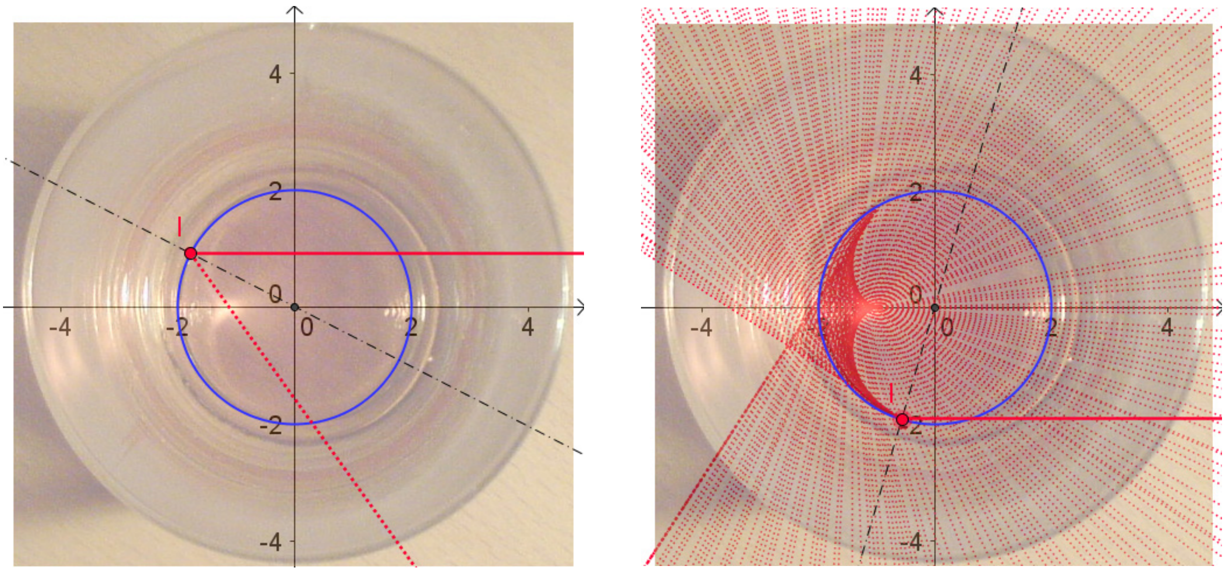
*Obálkou* (*obalovou křivkou*) systému křivek v rovině rozumíme křivku, která má v každém svém bodě tečnu společnou s jednou z křivek uvažovaného systému. Její rovnice jsou řešením soustavy rovnic, která je tvořena rovnicí parametrického systému křivek

$$l(x, y, \varphi) = 0, \tag{33}$$

kde $\varphi$ je reálný parametr, a její derivací podle tohoto parametru

$$\frac{\partial l(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = 0. \tag{34}$$

Při odvození rovnice zkoumané křivky v programu GeoGebra začneme zadáním souřadnic bodu dopadu $I$ a normálových vektorů $n_d$ a $n_r$ přímek, které v tomto pořadí reprezentují dopadající a odražený paprsek, viz řádky 1–4 následujícího kódu řešení v prostředí CAS GeoGebry.



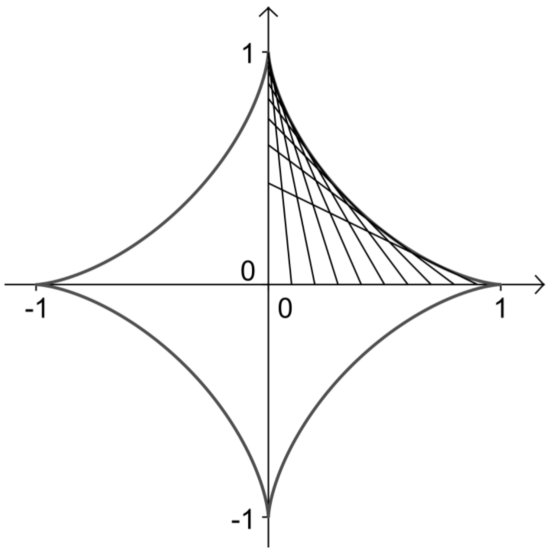

a) Odraz světla b) Obálka odražených paprsků

Obrázek 55: : Geometrický model vzniku kaustiky, GeoGebra 5.0

| | |
|---|---|
| 1 | P:=(x,y)<br>$\rightarrow\ P := (x, y)$ |
| 2 | I:=(cos(φ+ π /2),sin(φ+ π /2))<br>$\rightarrow\ I := (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ |
| 3 | n_d:=Vektor[(0,1)]<br>$\rightarrow\ n_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| 4 | n_r:=Vektor[(-sin(2 φ),cos(2 φ))]<br>$\rightarrow\ n_r := \begin{pmatrix} -\sin(2\ \varphi) \\ \cos(2\ \varphi) \end{pmatrix}$ |
| 5 | l(φ):=(P-I)*n_r<br>$\rightarrow\ l(\varphi) := -(\sin(\varphi) + x)\ \sin(2\ \varphi) + (-\cos(\varphi) + y)\ \cos(2\ \varphi)$ |
| 6 | dl(φ):=Derivace[l(φ),φ]<br>$\rightarrow\ dl(\varphi) := -2\ x\ \cos(2\ \varphi) - 2\ y\ \sin(2\ \varphi) - \sin(\varphi)\ \cos(2\ \varphi) + \sin(2\ \varphi)\ \cos(\varphi)$ |
| 7 | K:=Reseni[{l(φ)=0,dl(φ)=0},{x,y}]<br>$\rightarrow\ K := \left( -\frac{1}{4}\ \sin(3\ \varphi) - \frac{3}{4}\ \sin(\varphi)\quad \frac{1}{4}\ \cos(3\ \varphi) + \frac{3}{4}\ \cos(\varphi) \right)$ |

Poté definujeme rovnice (33), (34), v uvedeném kódu jsou nazvány `l`($\phi$) a `dl`($\phi$), viz řádky 5–6 kódu. Řešením soustavy těchto rovnic je bodová rovnice zkoumané křivky, kterou vidíme na posledním řádku č. 7 kódu řešení.

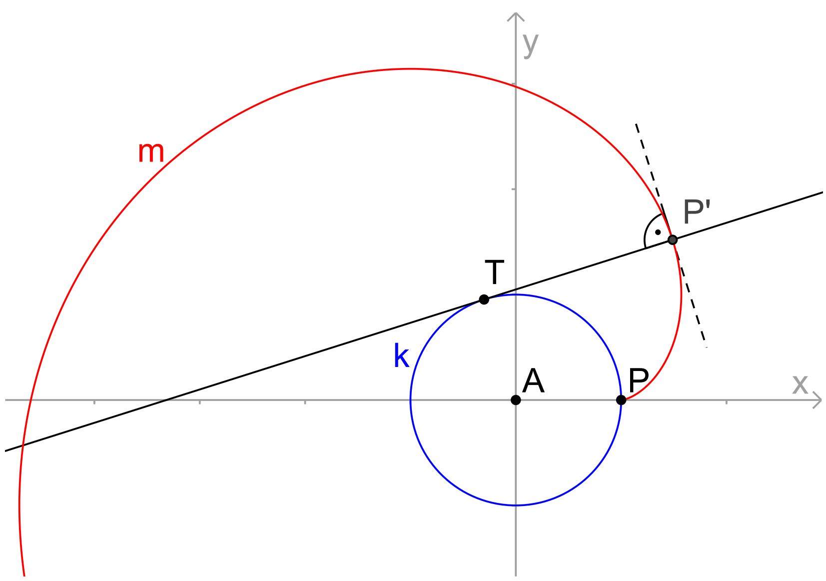
Dalším příkladem obalové křivky je *asteroida*. Můžeme ji totiž definovat jako *obálku* jednotlivých poloh úsečky, jejíž koncové body se pohybují podél kolmých přímek, viz Obr. 56. Pokuste se tuto křivku modelovat v GeoGebře, případně vypočítat její bodovou rovnici.




Obrázek 56: Asteroida

## 9.2 Evoluta a evolventa

Viz Obr. 57. Rovinná křivka $m$, která protíná kolmo všechny tečny dané křivky $k$, se nazývá *evolventa* křivky $k$. Rovinná křivka $k$, pro kterou je křivka $m$ evolventou se nazývá *evolutou* křivky $m$.



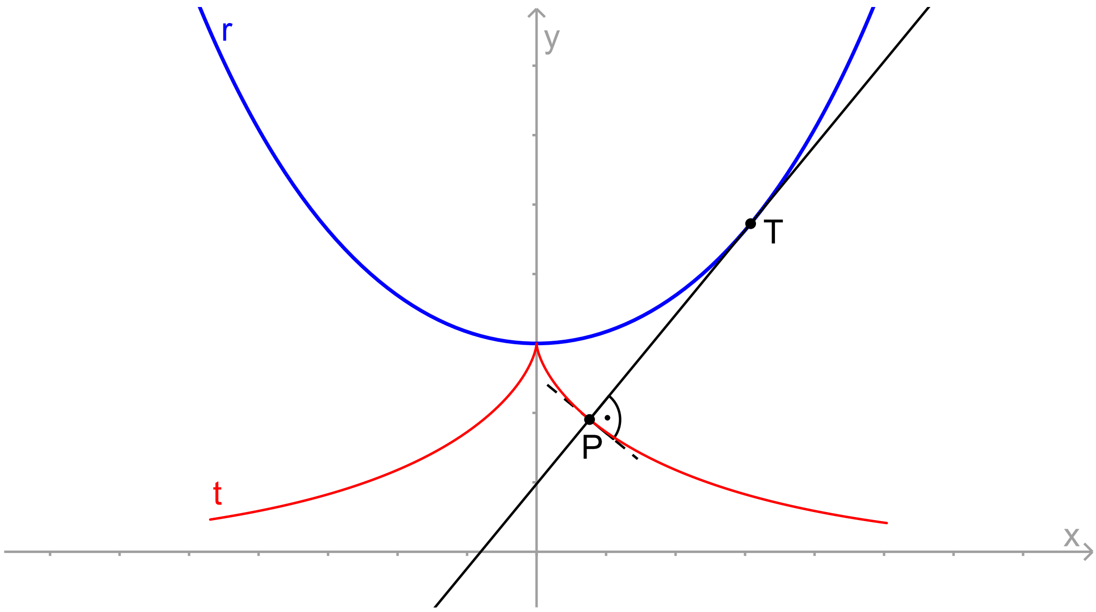

Obrázek 57: Evoluta $k$ a evolventa $m$

K dané křivce $k$ existuje nekonečně mnoho evolvent. Všechny tyto evolventy mají společné normály, které jsou tečnami $k$. Všechny je můžeme získat jako trajektorie bodů tečny odvalující se po křivce $k$ (na odvalující se tečnu nanášíme délku oblouku, měřeného od pevně zvoleného bodu křivky k dotykovému bodu tečny, tj. na Obr. 57 je délka úsečky $TP'$ shodná s délkou oblouku $PT$).

Pokud křivka $m$ nemá inflexní bod a má všude nenulovou derivaci první křivosti, existuje k ní jediná evoluta. Tato evoluta je množinou všech středů oskulačních kružnic křivky $m$. Evolutu dané rovinné křivky můžeme charakterizovat také jako obalovou křivku normál této křivky.

Na Obr. 57 vidíme část evolventy $m$ kružnice $k$ (kružnice $k$ je tedy evolutou křivky $m$). V technické praxi se tato křivka uplatňuje při návrhu tvaru zubů u ozubených kol. Tvar evolventy kružnice zajišťuje odvalování zubů dvou kol po sobě a tím dochází k plynulému přenosu síly během jejich vzájemného otáčení.

Příkladem další známé dvojice křivek ve vztahu evoluta–evolventa je dvojice řetězovka–traktrix, viz Obr. 58.




Obrázek 58: Řetězovka $r$ a traktrix $t$

Pro detailní seznámení s pojmy *evoluta* a *evolventa* lze doporučit [1] a [13].

# Literatura


[1] Budinský, B. *Analytická a diferenciální geometrie.* SNTL, Praha, 1983.

[2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry revisited.* The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[3] Devlin, K. *Jazyk matematiky.* ARGO, 2003.

[4] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.

[5] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907.
Dostupné na `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf`

[6] Havlíček, K. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.* SNTL, Praha, 1956.

[7] Klíma, J. *Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii.* Kapitola „Gnómonický a stereografický průmět kulové plochy“. Praha: JČMF, edice „Cesta k vědění“, 1944, str. 18-25.
Dostupné na
`http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403087/CestaKVedeni_013-1944-1_6.pdf`

[8] Kuřina, F. *10 geometrických transformací.* Prometheus, Praha, 2002.

[9] Kuřina, F. *10 pohledů na geomatrii.* Akademie věd České republiky, Praha, 1996.

[10] Kutuzov, B. V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.

[11] Pech, P. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2005.
Dostupné na `http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Metody.pdf`

[12] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.
Dostupné na `http://dml.cz/dmlcz/402750`

[13] Rektorys, K. *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 2009.

[14] Sekanina, M. a kol. *Geometrie II*, SPN Praha, 1988.

[15] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství.* Práh, Praha, 2003.

[16] Vyšín, J. a kol.: Geometria pre pedagogické fakulty II, Bratislava, 1970.