Úloha není euklidovsky řešitelná.

Dokážeme neřešitelnost úlohy pomocí kružítka a pravítka. Zvolíme $t_a = \frac{1}{2}$, $t_b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 1$.

Všechna tato čísla jsou zřejmě konstruovatelná. Dále dokážeme, že trojúhelník s $t_a = \frac{1}{2}$,

$t_b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 1$ existuje. Vyjdeme ze vzorců

$$-a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 4t_a^2,$$
$$2a^2 - b^2 + 2c^2 = 4t_b^2.$$

Označíme $\lambda = a^2$, $\mu = b^2$, $\nu = c^2$ (což je obrat, který nám po technické stránce velmi usnadní další úvahy) a dosadíme za t_a a t_b. Dostáváme

$$-\lambda + 2\mu + 2\nu = 1,$$
$$2\lambda - \mu + 2\nu = 2.$$

Z těchto dvou rovnic vypočteme

$$\lambda = \frac{5-6\nu}{3}, \qquad \mu = \frac{4-6\nu}{3}. \tag{1}$$

Dále použijeme vzorec

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}. \tag{2}$$

Po umocnění, dosazení $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ a úpravách z něho dostáváme

$$2r^2(\lambda^2 + u^2 + \nu^2) - r^2(\lambda + \mu + \nu) + \lambda\mu\nu = 0.$$

Dosadíme-li sem $r = 1$ a za λ a μ z (1), vychází

$$36\nu^3 + 27\nu^2 - 34\nu + 1 = 0.$$

Označme $f(x) = 36x^3 + 27x^2 - 34x + 1 = 0.$ Snadno zjistíme, že $f\left(\frac{1}{34}\right) > 0.$ Potom platí $f\left(\frac{1}{3}\right) = -6 < 0.$ Mnohočlen *f* má tedy v intervalu $\left(\frac{1}{34}, \frac{1}{3}\right)$ alespoň jeden kořen. Vyberme tedy jeden kořen ležící v tomto intervalu a označme ho ξ. (Tento výběr je fakticky zbytečný, poněvadž se dá ukázat, že *f* má v tomto intervalu jediný kořen. Tím se ale nemusíme vůbec

zabývat. Všimněte si, že kořen ξ explicitně neznáme, známe jen interval, ve kterém leží. To ale postačí.)
V souladu s (1) položíme

$$a = \sqrt{\frac{5-6\xi}{3}}, \qquad b = \sqrt{\frac{4-6\xi}{3}}, \qquad c = \sqrt{\xi} \tag{3}$$

a ukažme, že existuje trojúhelník *ABC* se stranami těchto déle. K tomu je nutné a stačí ověřit tři trojúhelníkové nerovnosti (označme je postupně (4), (5), (6)).

$$\sqrt{\xi} < \sqrt{\frac{5-6\xi}{3}} + \sqrt{\frac{4-6\xi}{3}}, \tag{4}$$

$$\sqrt{\xi} < \frac{5-6\xi}{3} + 2\sqrt{\frac{(5-6\xi)(4-6\xi)}{3\cdot 3}} + \frac{4-6\xi}{3},$$

$$15\xi - 9 < 2\sqrt{(5-6\xi)(4-6\xi)}.$$

(Všimněte si, že $5-6\xi > 4-6\xi > 0$, neboť $\xi < \frac{1}{3}$.) Zřejmě $15\xi - 9 < 15\frac{1}{3} - 9 < 0$, takže poslední nerovnost platí. Tím je dokázáno, že první trojúhelníková nerovnost (4) je splněna.

$$\sqrt{\frac{5-6\xi}{3}} < \sqrt{\xi} + \sqrt{\frac{4-6\xi}{3}}, \tag{5}$$

$$\frac{5-6\xi}{3} < \xi + 2\sqrt{\frac{\xi(4-6\xi)}{3}} + \frac{4-6\xi}{3},$$

$$\frac{1-3\xi}{3} < 2\sqrt{\frac{4\xi-6\xi^2}{3}},$$

$$\left(\frac{1-3\xi}{3}\right)^2 < 4\frac{4\xi-6\xi^2}{3},$$

$$81\xi^2 - 54\xi + 1 < 0.$$

Vyšetřováním kvadratického mnohočlenu $81\xi^2 - 54\xi + 1$ snadno zjistíme, že je záporný na intervalu $\left(\frac{3-\sqrt{8}}{9}, \frac{3+\sqrt{8}}{9}\right)$. Protože však $\left(\frac{1}{34}, \frac{1}{3}\right) \subset \left(\frac{3-\sqrt{8}}{9}, \frac{3+\sqrt{8}}{9}\right)$, je jasné, že platí poslední nerovnost, a tudíž i druhá trojúhelníková nerovnost (5).

$$\sqrt{\frac{4-6\xi}{3}} < \sqrt{\xi} + \sqrt{\frac{5-6\xi}{3}}, \tag{6}$$

$$\frac{4-6\xi}{3} < \xi + 2\sqrt{\frac{\xi(5-6\xi)}{3}} + \frac{5-6\xi}{3},$$

$$-\xi - \frac{1}{3} < 2\sqrt{\frac{\xi(5-6\xi)}{3}}.$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, neboť její levá strana je záporná. Platí tedy i třetí trojúhelníková nerovnost (6).
Dokázali jsme tedy, že trojúhelník se stranami délek (3) existuje. Počítáme-li v tomto trojúhelníku délky t_a a t_b, zjistíme, že $t_a = \frac{1}{2}$ a $t_b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Podobně vypočteme *r*. Ze vzorce (2) dostáváme

$$r = \frac{abc}{\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}},$$

odtud po dosazení do (3) vychází

$$r = \frac{\sqrt{36\xi^3 - 54\xi^2 + 20\xi}}{\sqrt{-81\xi^2 + 54\xi - 1}}.$$

Protože však ξ je kořenem mnohočlenu *f*, platí $36\xi^3 = -27\xi^2 + 34\xi - 1.$ Vychází tedy $r = 1$. Dokázali jsme tak, že trojúhelník $t_a = \frac{1}{2}$, $t_b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 1$ existuje. Je zřejmé, že číslo $c = \sqrt{\xi}$ je konstruovatelné, právě když je konstruovatelné číslo ξ. My dokážeme, že ξ není konstruovatelné. To znamená, že ani *c* není konstruovatelné, a že tedy trojúhelník *ABC* nelze zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka. Číslo ξ je kořenem mnohočlenem *f* stupně 3 s racionálními koeficienty. Dokážeme-li navíc, že tento mnohočlen je nerozložitelný v oboru racionálních čísel, máme podle jisté věty dokázáno, že ξ není konstruovatelné. Mnohočlen *f* má však dokonce celočíselné koeficienty. Kdyby byl rozložitelný v oboru racionálních čísel, musel by podle Gaussovy věty být rozložitelný též v oboru celých čísel. Existovala by tedy celá čísla d_0, d_1, e_0, e_1, e_2 taková, že

$$36x^3 + 27x^2 - 34x + 1 = \left(d_O x + d_1\right)\left(e_0 x^2 + e_1 x + e_2\right).$$

Platilo by tedy $d_1 e_2 = 1$, což plyne ze srovnání absolutních členů na obou stranách. Muselo by tedy být buď $d_1 = e_2 = 1$, nebo $d_1 = e_2 = -1.$ Zaměříme se na první případ. Druhý je zcela analogický. Srovnáním koeficientů u x, x^2 a x^3 dostáváme

$$d_0 + e_1 = -34, \qquad d_0 e_1 + e_0 = 27, \qquad d_0 e_0 = 36.$$

Ihned vidíme, že poslední rovnosti vyhovují pouze uspořádané dvojice $(d_0, e_0) = (\pm 1, \pm 36), (\pm 2, \pm 18), (\pm 3, \pm 12), (\pm 4, \pm 9), (\pm 6, \pm 6), (\pm 9, \pm 4), (\pm 12, \pm 3), (\pm 18, \pm 2),$ $(\pm 36, \pm 1).$ Ke každé takové dvojici z druhé rovnice vypočteme e_1. Nevyjde-li e_1 celé, není třeba dále uvažovat. V případech, že e_1 vychází celé, snadno zjistíme, že první rovnost není nikdy splněna. Dokázali jsme tak,že mnohočlen *f* není rozložitelný v oboru racionálních čísel. Tím je dokázána euklidovská neřešitelnost úlohy.