Otázky ke zkoušce z Lineární algebry a geometrie ... KMA/LA2

Letní semestr 2019

1.	**I. Vektorový prostor.** Uveďte několik příkladů vektorových prostorů. Vyslovte definici vektorového prostoru. Jednotlivé vlastnosti z definice ilustrujte na vybraném příkladu. Které z následujících množin splňují definici vektorového prostoru (vysvětlete proč): a) $M_1 = \{(x,y) \in R^2; y = -2x+1\}$, b) $M_2 = \{(x,y) \in R^2; y = 5x\}$, c) $M_3 = \{(0,0,0)\}$? **II. Lineární kombinace.** Na jednoduchém příkladu objasněte pojmy lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární obal množiny a množina generátorů vektorového prostoru. Uveďte příklady množin generátorů vektorových prostorů R^2, R^3, R^4, které nejsou jejich bázemi, a správnost těchto příkladů dokažte.
2.	**I. Lineární závislost a nezávislost vektorů.** Definujte pojmy „lineárně závislé vektory" a „lineárně nezávislé vektory". Ilustrujte konkrétními příklady. Vysvětlete, proč je následující tvrzení pravdivé, ilustrujte ho jednoduchým příkladem: *„Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru V. Pokud množina M obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá."* **II. Dimenze a báze vektorového prostoru.** Definujte pojem báze vektorového prostoru. Jaký je vztah mezi bází a množinou generátorů vektorového prostoru? Kolika způsoby můžeme zapsat daný vektor pomocí vektorů dané báze příslušného vektorového prostoru? Svou odpověď dokažte. Co rozumíme pojmem dimenze vektorového prostoru? Uveďte příklady množin generátorů a bází vektorových prostorů R^2, R^3, R^4.
3.	**I. Steinitzova věta.** Vyslovte Steinitzovu větu o výměně. Vyjmenujte alespoň tři důsledky této věty. S pomocí Steinitzovy věty o výměně dokažte jednu z následujících dvou vět (Můžete je ilustrovat jednoduchými příklady.): a) „Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru $V \neq \vec{o}$ mají týž počet prvků." b) „Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ je množina generátorů vektorového prostoru *V*, pak $\dim V \leq m$." **II. Řešení soustav lineárních rovnic.** Jak může dopadnout řešení soustavy lineárních rovnic. Ilustrujte též geometricky na příkladu soustav lineárních rovnic o dvou, resp. třech neznámých. Vyslovte Frobeniovu větu. Co rozumíme pojmem homogenní soustava lineárních rovnic? Jaký je vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy? Jak můžeme charakterizovat množiny řešení těchto soustav v souvislosti s pojmy vektorový a bodový prostor?
4.	**I. Podprostor vektorového prostoru.** Definujte pojem podprostor vektorového prostoru. Uveďte všechny možné podprostory vektorových prostorů R^2 a R^3. Jaký je „největší" a „nejmenší" podprostor daného vektorového prostoru *V*? Jaká je nutná podmínka existence vektorového (pod)prostoru, co musí obsahovat? Rozhodněte, zda jsou uvedené množiny podprostory v R^3. Své tvrzení zdůvodněte. a) $W_1 = \{(r, 3r, 5r); r \in R\}$, b) $W_2 = \{(2s-t, \mathrm{s+t}, \mathrm{s\text{ - }2t}); \mathrm{s}, t \in R\}$, c) $W = \{(r+1, 3r, 5r); r \in R\}$. **II. Afinní soustava souřadnic.** Jaký je účel afinní soustavy souřadnic? Popište způsob jejího zavedení. Co je to repér? Jaký je vztah mezi souřadnicemi bodu a jeho průvodiče? Co to je kartézská soustava souřadnic? Uveďte výhody jejího použití (výhody ortonormální báze).

5.	**I. Skalární součin.** Vyslovte definici skalárního součinu. Uveďte několik příkladů skalárního součinu. Na příkladu libovolného skalárního součinu vysvětlete vlastnosti specifikované definicí této operace. Definujte normu vektoru? Jak lze využít skalární součin k výpočtu odchylky dvou vektorů? Jak nám usnadňuje výpočet skalárního součinu vektorů zadání jejich souřadnic vzhledem k ortonormální bázi? **II. Ortogonální vektory.** Je nějaký rozdíl mezi pojmy „kolmé vektory“ a „ortogonální vektory“? Uveďte příklad trojice ortogonálních vektorů, které nejsou/jsou zároveň ortonormální. Uveďte aspoň dva příklady ortonormální báze. Dokažte tvrzení, že *„jsou-li nenulové vektory ortogonální, jsou lineárně nezávislé.“*
6.	**I. Afinní bodový prostor.** Uveďte příklady afinních bodových prostorů. Jak definujeme tento pojem? Jaký je rozdíl mezi afinním bodovým prostorem a vektorovým prostorem. Vysvětlete pojem afinní soustava souřadnic. Jak přejdeme od souřadnic vektoru k souřadnicím bodu? Které z následujících dvou tvrzení je pravdivé: a) *„Vektorový prostor V_n je zároveň i afinním bodovým prostorem.“* b) *„Afinní bodový prostor A_n je zároveň i vektorovým prostorem.“* **II. Afinní bodový podprostor.** Vysvětlujte pojem afinní bodový podprostor. Jaký je jeho vztah k afinnímu bodovému prostoru? Vyjmenujte podprostory, které existují v A_2 *a* A_3? Vysvětlete podstatu parametrického zadání těchto podprostorů. Ilustrujte na příkladech.
7.	**I. Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů.** Jak lze zadat různé afinní podprostory (parametricky, neparametricky)? Pokud lze podprostor zadat více způsoby, jak lze mezi nimi přecházet? Ilustrujte na rovinách a přímkách. Jaké mohou být vzájemné polohy afinních podprostorů a jak tyto polohy určíme. Jak poznáme, že dva rovnoběžné podprostory jsou incidentní? **II. Určení afinního bodového podprostoru.** Jak byste ukázali pravdivost tvrzení: *„Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen jednoznačně (k + 1) lineárně nezávislými body.“* Co to jsou lineárně nezávislé body? Vysvětlete na příkladu roviny v A_3. Jak byste vysvětlili, že je určena 3 nezávislými body?
8.	**I. Nadrovina.** Definujte pojem nadrovina. Co je nadrovinou v afinním bodovém prostoru A_2, resp. A_3? Uveďte možné způsoby matematického popisu nadrovin v těchto prostorech. Jaké mohou být vzájemné polohy nadrovin v prostorech A_2, resp. A_3? Co může být průnikem dvou nadrovin v prostorech A_2, resp. A_3? **II. Vzdálenost podprostorů.** Jak definujeme vzdálenost dvou bodů? Odvoďte vztah pro určení vzdálenosti bodu od přímky/roviny. Uveďte tento vztah do souvislosti s obecnou rovnicí přímky/roviny. Jak určíme vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2 a rovin v E_3.
9.	**I. Obecná (neparametrická) rovnice nadroviny.** Vysvětlete pojem nadrovina. Pojem obecná (neparametrická) rovnice nadroviny ilustrujte na příkladu přímky v A_2 a roviny v A_3. Uveďte alespoň čtyři různé postupy jejího odvození i s jejich případnou geometrickou interpretací. Jak určíte obecnou rovnici roviny, znáte-li *i)* tři body, *ii)* dva body a vektor ze zaměření roviny, *iii)* bod a dva vektory ze zaměření roviny? **II. Vzájemné polohy dvou bodových podprostorů.** Vyjmenujte všechny možnosti vzájemné polohy dvou přímek, dvou rovin a roviny a přímky. Jak lze tyto polohy určit, známe-li parametrické, případně obecné, rovnice daných podprostorů. Vysvětlete pojem *příčka mimoběžných podprostorů.*

10.	**I. Vektorový součin.** Definujte vektorový součin. Jaké jsou vlastnosti vektorového součinu? Uveďte způsob výpočtu vektorového součinu. Na příkladu z A_3 ilustrujte použití vektorového součinu při výpočtu obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku. **II. Ortogonální doplněk vektorového podprostoru.** Je nějaký rozdíl mezi pojmy „kolmé vektory“ a „ortogonální vektory“? Uveďte příklad ortogonálních vektorů, které nejsou/jsou zároveň ortonormální. Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk podprostoru? Jaká je dimenze ortogonálního doplňku podprostoru V_k ve vektorovém prostoru V_n? Ilustrujte na příkladu V_3.
11.	**I. Kolmost podprostorů.** Je nějaký rozdíl mezi pojmy „kolmé vektory“ a „ortogonální vektory“? Uveďte příklady vzájemně kolmých vektorů. Kdy je vektor kolmý k podprostoru? Jaká je postačující podmínka kolmosti vektoru k podprostoru? Vysvětlete pojmy „kolmé podprostory“ a „totálně kolmé podprostory“. Ilustrujte na příkladu podprostorů V_3. **II. Eukleidovský bodový prostor.** Kdy můžeme afinní bodový prostor nazvat Eukleidovským bodovým prostorem? Co rozumíme pojmem kartézská soustava souřadnic? Jak definujeme vzdálenost bodů? Uveďte několik vlastností vzdálenosti bodů. Jak počítáme vzdálenost bodů v kartézské soustavě souřadnic?
12.	**I. Vnější součin.** Vysvětlete geometrický význam vnějšího (smíšeného) součinu v prostoru dimenze 3 a proveďte jeho odvození. Popište, jak můžeme využít vnější součin při výpočtu obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku a při výpočtu objemu rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu. **II. Odchylka podprostorů.** Co rozumíme odchylkou přímky od roviny v E_3? Jak tuto odchylku spočítáme? Jak určíme kolmý průmět jednoho vektoru do směru jiného vektoru? Jak určíme odchylku dvou rovin E_3?