10 Vnější součin

Dosud jsme se seznámili se dvěma binárními[7] operacemi s vektory, *skalárním součinem*, viz str. 58, jehož výsledkem je *číslo* (*skalár*) a který pro vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ zapisujeme

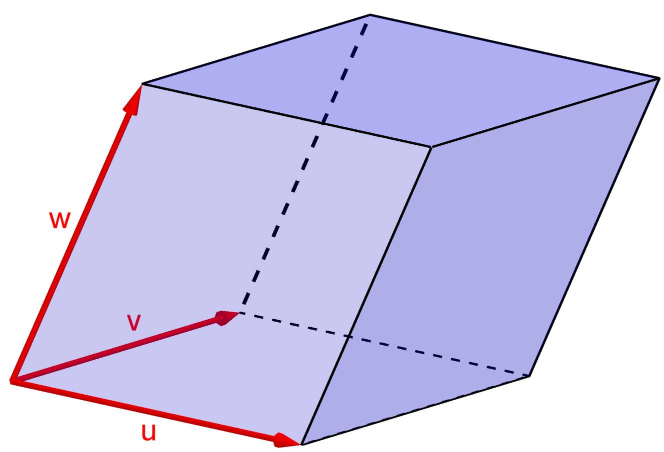
$$\vec{u} \cdot \vec{v},$$

a *vektorovým součinem*, definovaným v trojrozměrném prostoru, viz str. 104, jehož výsledkem je *vektor* a který pro vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ zapisujeme ve tvaru

$$\vec{u} \times \vec{v}.$$

Každá z těchto operací má své praktické užití. Skalární součin nám dovoluje určovat odchylky směrů a velikosti vektorů. Vektorový součin nám zase dovoluje vypočítat obsah plochy omezené vektory, významné užití má i skutečnost, že jeho výsledkem je vektor kolmý na oba dané vektory. Nyní se seznámíme s třetí operací s vektory, která je kombinací uvedených dvou.

Vnější součin, též *smíšený součin*, je ve vektorovém prostoru dimenze 3 operací, do které vstupují tři vektory (jedná se tedy o *ternární operaci*) a jejímž výsledkem je číslo. Absolutní hodnota tohoto čísla je přitom rovna objemu rovnoběžnostěnu vymezeného těmi třemi vektory, které do součinu vstupují, viz Obr. 43. Jak si ukážeme,



Obrázek 43: Rovnoběžnostěn určený vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

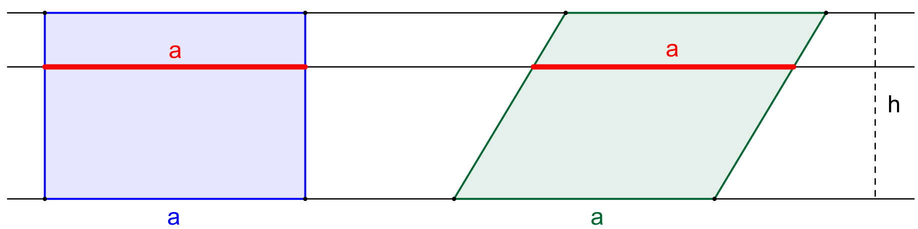
lze vnější součin v prostoru dimenze 3 interpretovat jako spojení vektorového a skalárního součinu, proto se mu říká také *smíšený součin*. Vnější součin není omezen na prostor dimenze 3, lze ho zobecnit do vektorového prostoru dimenze n (kde se ovšem jedná o operaci n–ární). Později to provedeme pro případ $n = 2$.

[7] Označení *binární* znamená, že do operace vstupují dva operandy, v našem případě dva vektory. Dalšími příklady binární operace jsou sčítání, odčítání, dělení, násobení. Pokud do operace vstupuje jeden operand, hovoříme o *unární* operaci. Příkladem unární operace je přiřazení čísla opačného, přičtení konstanty. Pokud do operace vstupují tři operandy, hovoříme o *ternární* operaci. Příkladem takovéto operace je vnější součin, jemuž je věnována tato kapitola.

Vztah pro výpočet vnějšího součinu odvodíme formou řešení následujícího příkladu. Nejprve se bude zdát, že nějakou novou operaci vlastně ani nepotřebujeme, že si vystačíme se skalárním a vektorovým součinem, abychom nakonec přišli na nečekané zjednodušení, které nám zavedení nové operace přinese. Notnou měrou k tomu využijeme znalost věty o rozvoji determinantu.

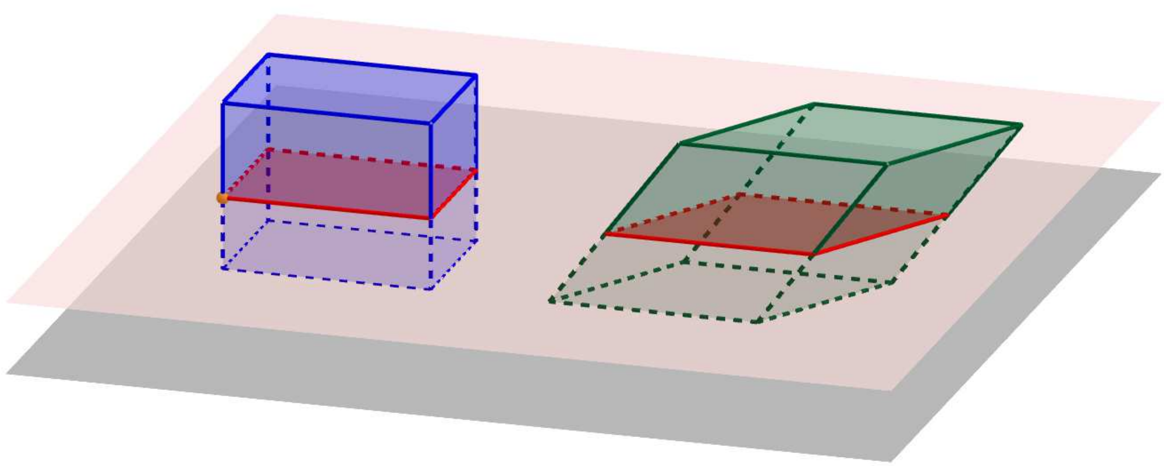
PŘÍKLAD 10.1. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, *viz Obr. 43.*

Řešení: Nejprve si ujasněme, jak lze vypočítat objem rovnoběžnostěnu. Uplatněním tzv. *Cavalieriho principu* dojdeme k tomu, že pro objem rovnoběžnostěnu platí stejný vztah jako pro objem kvádru, tj. $V = S \cdot h$, kde S je obsah podstavy a h je výška.



Obrázek 44: Cavalieriho princip v rovině

Cavalieriho princip si můžeme ilustrovat nejprve na příkladu rovinných obrazců. Uvažujme obdélník a rovnoběžník, oba se základnou stejné délky a a s výškou h, viz Obr. 44. I bez Cavalieriho principu víme, že mají stejný obsah $S = a \cdot h$. Pojďme však

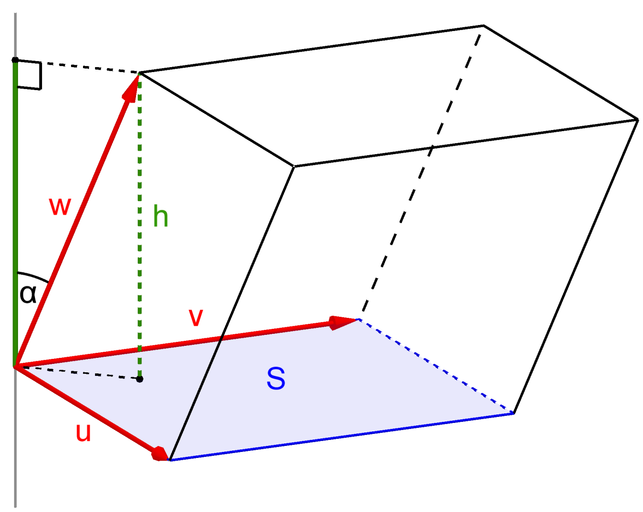


Obrázek 45: Cavalieriho princip v trojrozměrném prostoru

teď na zelený rovnoběžník nahlížet jako na útvar, jehož obsah spočítat neumíme, zatímco u modrého obdélníku nám to nečiní problémy. V takové situaci nám právě pomůže Cavalieriho princip. Ten nám pro tyto dva rovinné obrazce říká toto: *Obrazce mají stejné obsahy, pokud jsou shodné délky úseček, v nichž je protíná každá přímka rovnoběžná s přímkou, v níž leží jejich základny.* Protože je zřejmé, že každá taková přímka má s oběma útvary shodné průniky délky a, mají stejné obsahy, tj. rovnoběžník má stejný obsah $S = a \cdot h$ jako obdélník.

Stejný princip nyní uplatníme na kvádr a rovnoběžnostěn, viz Obr 45. Jejich podstavy leží ve společné rovině, jsou jimi ty dva rovinné útvary, obdélník a rovnoběžník, z Obr. 44 (online applet je zde: https://www.geogebra.org/m/fxz66m8q), o kterých víme, že mají stejný obsah. Cavalieriho princip nám pro takové prostorové útvary říká, že *pokud se shodují obsahy jejich řezů každou rovinou rovnoběžnou s rovinou jejich podstav, shodují se i jejich objemy*. Jednou z takových rovin rovnoběžných s rovinou podstav je červená rovina na Obr. 44. S kvádrem má jako průnik obdélník, s rovnoběžnostěnem rovnoběžník. Protože se tyto obrazce řezů shodují s podstavami příslušných útvarů, o nichž víme, že mají shodné obsahy, mají i tyto řezy shodné obsahy. Dle Cavalieriho principu má tedy rovnoběžnostěn stejný objem $V = S \cdot h$ jako kvádr o stejné výšce h a stejném obsahu podstavy S.

Pokračujeme v řešení příkladu 10.1 dle Obr. 46. Víme, že objem V rovnoběž-



Obrázek 46: Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

nostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je dán vztahem $V = S \cdot h$. Z Obr. 46 a z vlastností vektorového součinu (absolutní hodnota jeho velikosti je rovna obsahu rovnoběžníku omezeného vektory) a z definice funkce $\cos\alpha$ v pravoúhlém trojúhelníku ($\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$) plyne, že $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ a $h = |\vec{w}|\cos\alpha$. Potom

$$V = S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}|\cos\alpha.$$

Užitím (43) (viz str. 68) můžeme psát $|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}|\cos\varphi = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$. Objem uvažovaného rovnoběžnostěnu je pak dán vztahem

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}, \tag{128}$$

který je pozoruhodný tím, že smysluplně (pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu) spojuje vektorový a skalární součin. Je tak již zřejmé, proč se vnějšímu součinu říká také *smíšený součin*, jedná se o „směs“ skalárního a vektorového součinu. Tím bychom mohli skončit a prohlásit (128) za onen hledaný vztah pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu. Byla by to ale škoda, ve vztahu (128) se totiž skrývá přímá souvislost vnějšího součinu s determinantem, která navíc dovoluje uskutečnit zobecnění vnějšího součinu do jiných dimenzí.

Pokud za $\vec{u} \times \vec{v}$ dosadíme podle (121) a poté aplikujeme větu o rozvoji determinantu[8], dostaneme postupně

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3),$$

$$\begin{aligned} V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že objem rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, viz též Obr. 46 je roven determinantu, jehož řádky tvoří tyto vektory. V obecném případě, kdy nemáme zaručeno, že úhel α je ostrý (výraz $|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ je v takovém případě záporný) je *objem rovnoběžnostěnu roven absolutní hodnotě uvedeného determinantu*, tj. *absolutní hodnotě vnějšího součinu příslušných vektorů.*

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|. \tag{129}$$

Tím je příklad 10.1 vyřešen! Poznatky, které jsme získali, shrneme formou následující věty.

Definice 24 (Vnější (smíšený) součin). *Operaci, která třem vektorům $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, daným souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vzhledem k ortonormální bázi V_3, přiřadí hodnotu determinantu*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{130}$$

případně výrazu

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}, \tag{131}$$

[8]Konkrétně nás v tuto chvíli zajímá, že z věty o rozvoji determinantu plyne pro determinant matice třetího řádu A vztah $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}) \cdot (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, kde i je číslo řádku od 1 do 3. Více o determinantu viz https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant.

který je s ním ekvivalentní, nazýváme vnější součin (též smíšený součin) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, značíme

$$[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}].$$

10.1 Vlastnosti vnějšího součinu

Přímo z (130) plynou následující vlastnosti vnějšího součinu:

(1) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}] = -[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$.

(2) Pro $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležící v jedné rovině (tj. *komplanární*) je $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$.

PŘÍKLAD 10.2. *Uvedené vlastnosti vnějšího součinu dokažte použitím jeho zápisu ve formě determinantu*

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

10.2 Užití vnějšího součinu

Zde si uvedeme konkrétní příklady aplikace vnějšího součinu v analytické geometrii v trojrozměrném prostoru i v rovině. Protože, jak plyne z definice 24, hodnota smíšeného součinu vektorů je rovna hodnotě determinantu matice, jejímiž řádky jsou v daném pořadí tyto vektory, bude se zároveň jednat o příklady užití determinantu v analytické geometrii a tím o ukázky praktického významu tohoto algebraického pojmu.

10.2.1 Objem rovnoběžnostěnu

PŘÍKLAD 10.3. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory* $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 2)$, $\vec{w} = (1, 1, 5)$.

Řešení: Dle (129) pro objem daného rovnboběžnostěnu platí

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| = 9. \tag{132}$$

10.2.2 Obsah rovnoběžníku/trojúhelníku v rovině

V řešení příkladů 9.2, 9.3 na str. 109 a 110 jsme si ukázali, jak lze k výpočtu obsahu rovnoběžníku či trojúhelníku využít vektorový součin, nejenom v prostoru dimenze 3, ale i v rovině. V případě roviny stačilo přidat jako třetí souřadnici nulu. Nyní si ukážeme, jak tento postup souvisí s *vnějším součinem*.

Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Pokud jejich souřadnice upravíme ne tvar $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ můžeme obsah rovnoběžníku, který je jimi určen, vyjádřit vztahem

$$S_\diamond = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Protože pro vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ platí

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right),$$

je zřejmé, že obsah uvažovaného rovnoběžníku lze vyjádřit také ve tvaru

$$S_\diamond = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|,$$

kde determinant $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ můžeme dle (130) chápat jako zápis vnějšího součinu $[\vec{u}\ \vec{v}]$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Potom ovšem můžeme psát

$$S_\diamond = |[\vec{u}\ \vec{v}]|.$$

Pojem vnějšího součinu tak můžeme použít i v rovině, tj. pro dva vektory o dvou složkách. Jeho absolutní hodnotu potom interpretujeme jako *obsah rovnoběžníku těmito vektory omezeného.*

Pro obsah příslušného trojúhelníku pak platí

$$S_\triangle = \frac{1}{2} S_\diamond = \frac{1}{2}|[\vec{u}\ \vec{v}]| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|. \tag{133}$$

Můžeme ovšem použít i zápis, v němž figurují přímo souřadnice bodů – vrcholů trojúhelníku. Dva nezávislé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ příslušející trojúhelníku ΔABC můžeme umístit do jeho stran AB a AC, tj. $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - A$. Po dosazení do (133) potom pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ platí

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\|. \tag{134}$$

Případně můžeme použít ekvivalentní tvar, v němž nefigurují rozdíly souřadnic daných bodů

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{135}$$

PŘÍKLAD 10.4. *Užitím svých znalostí o výpočtu determinantu pomocí věty o rozvoji determinantu dokažte, že platí*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Uvažujte rozvoj levého determinantu podle třetího sloupce, ovšem s tím, že si matici nejdříve upravíte tak, aby tento rozvoj měl jenom jeden člen.

Analogické vyjádření bychom dostali i pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru dimenze 3. Dostáváme tak následující snadno zapamatovatelné vztahy:

(1) *Obsah rovnoběžníku určeného body* A, B, C

$A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$:

$$S = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\|. \tag{136}$$

(2) *Objem rovnoběžnostěnu určeného body* A, B, C, D

$A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$:

$$V = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{matrix} \right\|. \tag{137}$$

PŘÍKLAD 10.5. *Vypočítejte obsah trojúhelníka* ABC, *je-li dáno:* $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.

Řešení: Použijeme (134) (můžeme ovšem použít také (135))

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right\| = 6.$$

10.2.3 Rovnice roviny určené třemi body

Vnější součin můžeme využít k elegantnímu zápisu obecné rovnice roviny dané třemi nekolineárními body, například A, B, C (viz Obr. 47). Využijeme skutečnosti, že právě jenom pro bod X náležející rovině ABC je objem rovnoběžnostěnu určeného trojicí vektorů $B - A$, $C - A$, $X - A$ roven nule. Obecnou rovnici roviny ABC tak můžeme zapsat ve tvaru

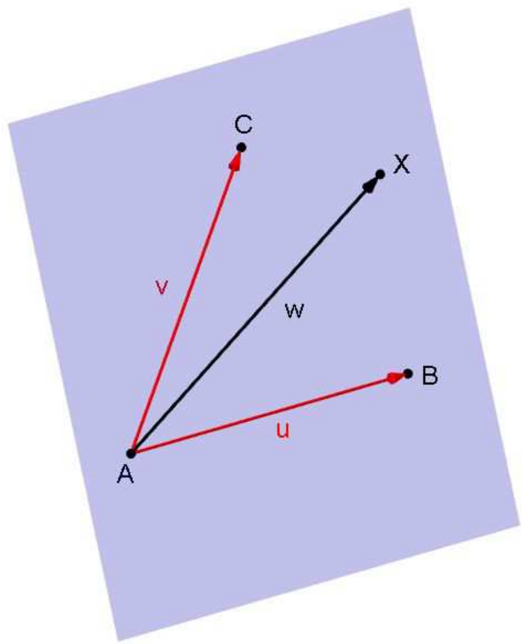
$$[(X - A)(B - A)(C - A)] = 0, \tag{138}$$

nebo pomocí determinantu obsahujícího souřadnice bodů X, A, B, C

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

případně souřadnice příslušných vektorů $X - A, B - A, C - A$

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Obrázek 47: Vektory $X - A, B - A, C - A$ jsou lineárně závislé

PŘÍKLAD 10.6. *Určete obecnou rovnici roviny* $\sigma = (ABC)$ *pro* $A = [-2, 3, 1]$, $B = [4, -2, 5]$, $C = [6, 1, 7]$.

Řešení: Zápis řešení v kódu programu wxMaxima:

```
(% i4)  A:[-2,3,1]$ B:[4,-2,5]$ C:[6,1,7]$ X:[x,y,z]$
(% i5)  M:matrix(X-A,B-A,C-A);
```

$$\begin{pmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 6 & -5 & 4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \tag{M}$$

```
(% i6)  expand(determinant(M))=0;
```

$$28z - 4y - 22x - 60 = 0 \tag{\% o6}$$

10.2.4 Objem simplexu

Dosud jsme se zabývali převážně vlastnostmi vektorového prostoru (tj. množiny směrů), přitom jsme si ale občas odskočili do bodového prostoru (tj. množiny bodů), abychom s jeho pomocí vektorový prostor znázorňovali (přímky nebo roviny jdoucí počátkem soustavy souřadnic), nebo abychom v něm zkoušeli výpočty založené na vlastnostech vektorů (vzdálenosti bodů, odchylky přímek, rovnice přímek a rovin). Takovou návštěvu bodového prostoru (konkrétně *Eukleidovského bodového prostoru*, viz kapitola 17) si dopřejeme i v této kapitole. Budeme se v ní sice zabývat téměř tím samým, jako v předcházejících kapitolách, tedy výpočty obsahů a objemů, tentokrát ovšem budeme na předmětné útvary nahlížet jako na speciální podmnožiny Eukleidovského bodového prostoru, tzv. *simplexy*.

„Simplex“ znamená latinsky „jednoduchý“. Zde tímto pojmem rozumíme *konvexní obal $n+1$ lineárně nezávislých bodů v E_n*, tj. konvexní obal 2 různých bodů v prostoru dimenze 1, 3 nezávislých bodů v prostoru dimenze 2, 4 nezávislých bodů v prostoru dimenze 3 atd. *Konvexním obalem množiny bodů* rozumíme *průnik všech konvexních množin, které tyto body obsahují*. Pro správné pochopení této charakteristiky simplexu si připomeneme význam použitých pojmů.

Konvexní a nekonvexní útvar

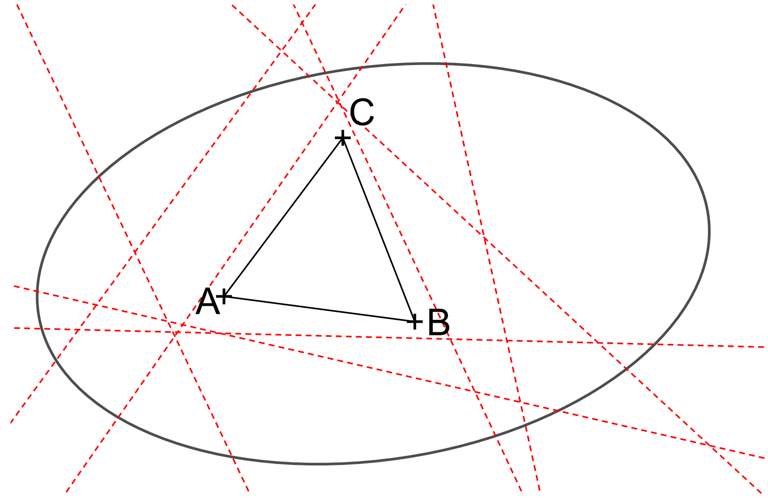
Útvar (množina bodů) je *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 48, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*, je potom

Obrázek 48: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 48, vpravo.

Konvexní obal

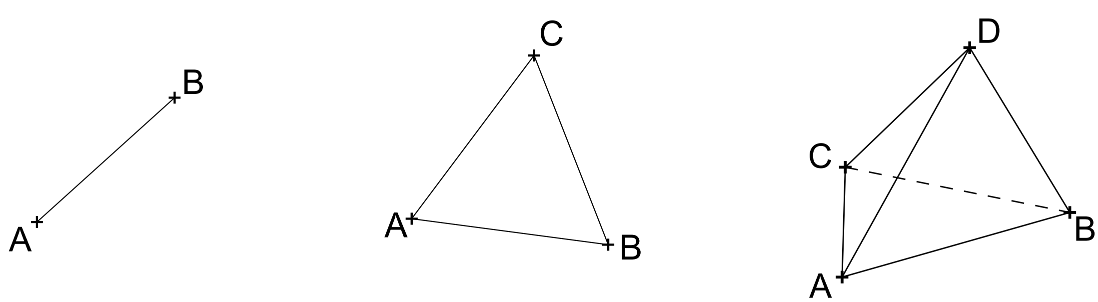
Význam pojmu *konvexní obal lineárně nezávislých bodů* si vysvětlíme na příkladu 3 lineárně nezávislých bodů. Body jsou lineárně nezávislé, pokud jsou lineárně nezávislé vektory jimi určené, viz definice 31 na str. 138. V případě tří bodů to nastane tehdy, když neleží v přímce (tj. nejsou *kolineární*), ale tvoří trojúhelník. Na Obr. 49 se jedná o body A, B, C. Na obrázku tyto body patří konvexnímu útvaru ve tvaru elipsy. Nyní tento útvar budeme „zmenšovat“, abychom nakonec dostali „nejmenší“ konvexní útvar, který ještě body A, B, C obsahuje. Protože takový útvar je průnikem všech konvexních množin, které tyto body obsahují, jedná se o jejich *konvexní*



Obrázek 49: Konvexním obalem 3 lineárně nezávislých bodů A, B, C je trojúhelník ΔABC

obal. Pro zachování konvexnosti budeme používat jenom rovné řezy, viz červené přerušované čáry. Je zřejmé, že se jimi dříve nebo později prořežeme právě k trojúhelníku ΔABC, a dále již nebudeme moci pokračovat. Trojúhelník ΔABC je proto konvexním obalem množiny lineárně nezávislých bodů A, B, C.

Stejným způsobem bychom se prořezali k úsečce v prostoru dimenze 1 (jako bychom hledali nejmenší část niti, která obsahuje „uzlíky“ A, B) a ke čtyřstěnu (trojbokému jehlanu) v prostoru dimenze 3 (zkuste okrajovat bramboru, použijte konvexní, aby na ní zůstaly čtyři body, které si na jejím povrchu vyznačíte), viz Obr. 50.

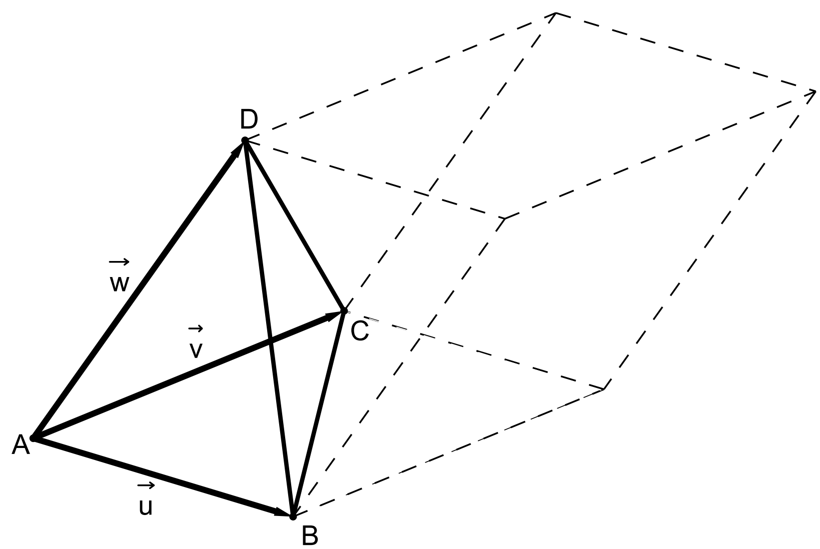


Obrázek 50: Úsečka, trojúhelník a čtyřstěn jako simplexy v bodových prostorech 1, 2 a 3, v daném pořadí

Nyní tedy již známe vše potřebné k tomu, abychom si následující příklad 10.7 uvedli jako *příklad na výpočet objemu simplexu v prostoru dimenze 3.*

PŘÍKLAD 10.7. *Určete objem čtyřstěnu s vrcholy* $A = [3,4,0]$, $B = [9,5,-1]$, $C = [1,7,1]$, $D = [3,2,5]$.

Řešení: Čtyřstěn $ABCD$ si můžeme představit jako část rovnoběžnostěnu určeného body A, B, C, D, viz Obr. 51. Protože objem rovnoběžnostěnu umíme spočítat, platí



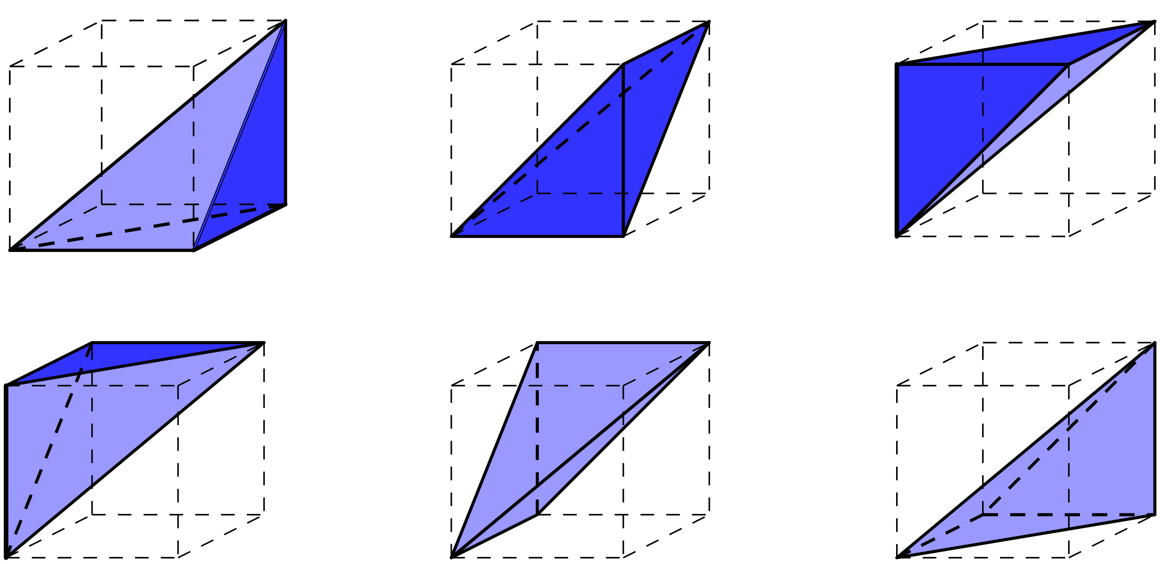
Obrázek 51: Čtyřstěn jako část rovnoběžnostěnu

pro něj

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = |[B-A,\ C-A,\ D-A]|,$$

viz též (137), stačí zjistit, jakou částí rovnoběžnostěnu čtyřstěn je. Řešení je překvapivě jednoduché. Díky již zmíněnému Cavalieriho principu, viz str. 114, stačí vyřešit tuto otázku pro krychli. Pro libovolný rovnoběžnostěn pak bude platit totéž.

Ptáme se tedy: *„Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů téhož objemu můžeme rozřezat krychli?“* Odpověď zní „6“, jak vidíme na následujících obrázcích.



Objem čtyřstěnu $ABCD$ je tak dán vztahem

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}|[B - A,\ C - A,\ D - A]| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{matrix} \right\|.$$

Jak víme, simplexem v rovině je trojúhelník. Rovinnou analogií výše uvedeného výpočtu objemu simplexu v prostoru dimenze 3 je tak výpočet obsahu trojúhelníku ΔABC

$$V(ABC) = \frac{1}{2}|[B - A,\ C - A]| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\|.$$

Jak ilustruje definice 26 v následující kapitole, lze vztah pro výpočet objemu simplexu zobecnit do prostoru libovolné dimenze n.

10.3 Vnější součin v prostoru V_n

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Definice 25 (Vnější součin). *Vnějším součinem*[1] *vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$, které jsou dány souřadnicemi $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = 1, 2, ..., n$, vzhledem k ortonormální bázi, nazýváme determinant*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Značíme ho

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n].$$

Spolu se zobecněním vnějšího součinu do prostoru dimenze n lze to samé provést i s výpočtem objemu simplexu.

Definice 26 (Objem simplexu). *Objemem simplexu, který je určen $n + 1$ body $A_1, A_2, ..., A_{n+1} \in E_n$, rozumíme číslo:*

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!}\left|[A_1 - A_{n+1},\ ...,\ A_n - A_{n+1}]\right|.$$

[1] Pro podrobnější studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

10.4 Cvičení: Vnější součin

1. Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{k} = (1, -3, 1)$, $\vec{l} = (2, 1, 2)$, $\vec{m} = (1, 1, 7)$.

2. Vypočítejte obsah trojúhelníka ΔABC je-li$A = [5, -1]$, $B = [3, 4]$, $C = [-1, 6]$.

3. Určete obecnou rovnici roviny $\rho = (KLM)$ pro $K = [2, 1, 3]$, $L = [-4, 5, 3]$, $M = [1, 1, 6]$.

3. Určete objem čtyřstěnu s vrcholy $A = [1, -5, 2]$, $B = [4, 7, 3]$, $C = [1, 0, 1]$, $D = [-3, 1, 6]$.

[1]Pro další studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 117–125