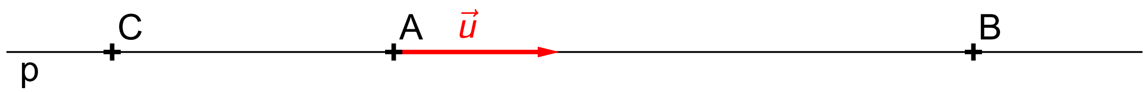
3 Lineární kombinace vektorů. Lineární závislost a nezávislost vektorů.

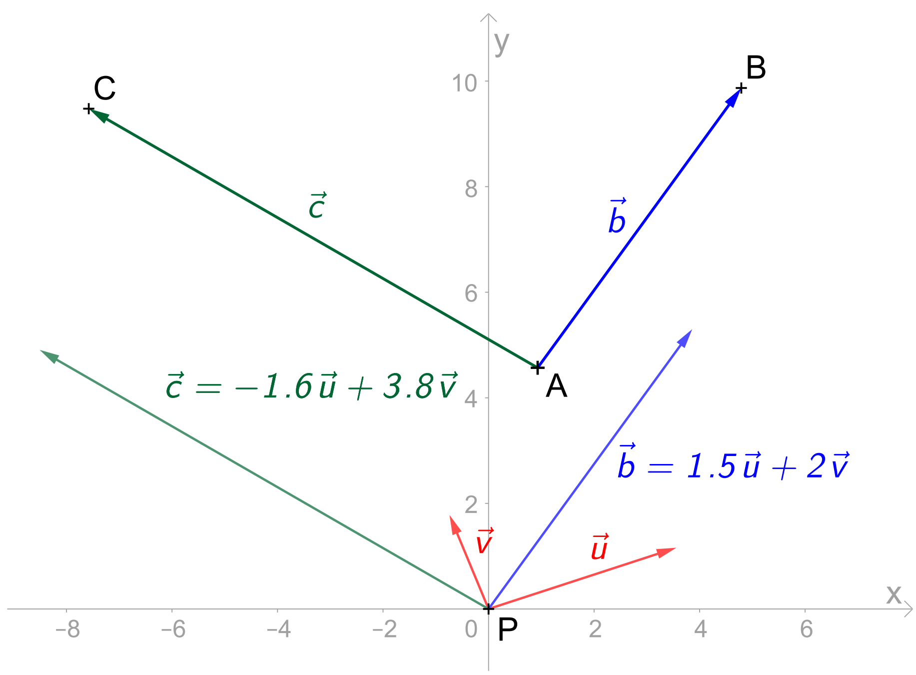
Pro uskutečnění „pohybu“ v bodovém prostoru, tj. pro přemístění z bodu do bodu, je důležité mít možnost udat směr (a samozřejmě také vzdálenost). Směr udáváme pomocí vektoru, potřebnou vzdálenost potom překonáme pomocí jeho násobku. Žijeme-li například na přímce p, viz Obr. 6, tj. v prostoru dimenze 1, dostaneme se z bodu A do bodu B tak, že se vydáme ve směru vektoru $\vec{u}$ a urazíme jeho 3,5 násobek. Do bodu C se potom vydáme ve směru vektoru opačného k $\vec{u}$ a urazíme jeho 1,7 násobek (z hlediska geometrického mají vektory $\vec{u}$ a $-\vec{u}$ stejný *směr*, liší se orientací). Můžeme proto psát:

$$B = A + 3{,}5\vec{u}, \quad C = A - 1{,}7\vec{u}.$$



Obrázek 6: $B = A + 3{,}5\vec{u}$, $C = A - 1{,}7\vec{u}$

Jak tomu bude při „pohybu“, tj. přemístění z bodu do bodu, v rovině nebo v prostoru (rozuměj v prostoru dimenze 3)? Pořád stejně, opět budeme z výchozího



Obrázek 7: $B = A + \vec{b} = A + 1{,}5\vec{u} + 2\vec{v}$, $C = A + \vec{c} = A - 1{,}6\vec{u} + 3{,}8\vec{v}$

bodu mířit vektorem do cílového bodu. Akorát budeme muset nějak postihnout skutečnost, že v těchto prostorech je, na rozdíl od přímky, nekonečně mnoho různých směrů (přímka má jenom jeden). Vhodným nástrojem pro to je *lineární kombinace* vektorů. Jak vidíme na Obr. 7, stačí zvolit si v rovině dva různoběžné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$. Každý další vektor se dá potom vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Cestu z A do B tak můžeme popsat vztahem

$$B = A + \vec{b} = A + 1{,}5\vec{u} + 2\vec{v},$$

cestu z A do C pak takto

$$C = A + \vec{c} = A - 1{,}6\vec{u} + 3{,}8\vec{v}.$$

Výrazy $1{,}5\vec{u}+2\vec{v}$, $-1{,}6\vec{u}+3{,}8\vec{v}$ představují lineární kombinace vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Je zřejmé, že stejný postup lze použít na všechny cesty. Výhoda je pak jasná. Všechny vektory (cesty mezi dvěma body) v rovině můžeme vyjádřit pomocí lineární kombinace dvou různoběžných (hovoříme o *nezávislých* vektorech, viz dále) vektorů. Vektory s touto rolí tvoří tzv. *systém generátorů* příslušného vektorového prostoru. Samozřejmě se hned nabízejí otázky k jejich počtu. My jsme pro rovinu použili dva. Může jich být ale i více? Nebo méně? Méně jich být samozřejmě nemůže. S jedním vektorem a jeho násobky bychom neobsáhli celou rovinu. Více jich být může. Pak je ale vyjadřování směru jako jejich lineární kombinace zbytečně pracné. Proč psát lineární kombinaci tří nebo i více vektorů, když nám stačí dva? Systém generátorů s minimálním počtem vektorů nutným pro vytvoření všech vektorů příslušného vektorového prostoru, tj. pro „generování“ tohoto prostoru, se nazývá *báze vektorového prostoru*. Množina $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ našich dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je tak příkladem báze vektorového prostoru dimenze 2. Další otázky se mohou týkat prostoru dimenze 3, tj. prostoru, v němž žijeme. Pro „cestování“ v tomto prostoru nám dva směry nestačí. To bychom se omezili jenom na rovinu. Potřebujeme tedy alespoň tři směry, takové, které neleží zároveň v jedné rovině (tj. tři *nezávislé* směry, viz dále). Proto je báze tohoto prostoru tvořena třemi nezávislými vektory a proto hovoříme o dimenzi 3. S lineární kombinací tří vektorů v trojrozměrném prostoru můžete experimentovat prostřednictvím appletu https://www.geogebra.org/m/KFL3Onq1. Uvedenými pojmy se budeme podrobně zabývat v následujících pasážích.

3.1 Lineární kombinace vektorů

Definice 4. *Nechť $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jsou prvky vektorového prostoru V nad tělesem T. Řekneme, že vektor $\vec{u}$ je* **lineární kombinací vektorů** *$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_n$, právě když existují prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$ tak, že platí:*

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i.$$

Prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** *lineární kombinace. Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace* **triviální***, jinak se nazývá* **netriviální**.

PŘÍKLAD 3.1. *Ověřte, zda vektor* $\vec{u} = (4, -1, 3)$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.

Řešení: Řešíme soustavu rovnic, která vzejde z vektorové rovnice

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Geometrické znázornění i algebraické řešení příkladu můžeme provést v programu GeoGebra, viz https://www.geogebra.org/m/rbsz8eug. Vektor $\vec{u}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, platí $\vec{u} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

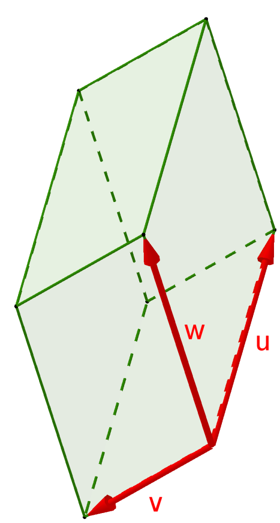
PŘÍKLAD 3.2. *Ověřte, zda vektor* $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.

Řešení: Řešíme analogicky s příkladem 3.1. Geometrické znázornění i algebraické řešení příkladu můžeme opět provést v programu GeoGebra, viz https://www.geogebra.org/r Tentokrát vektor $\vec{w}$ není lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Geometricky to znamená, že $\vec{w}$ neleží v rovině určené směry vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Algebraickou interpretací je potom skutečnost, že příslušná soustava lineárních rovnic nemá řešení.

PŘÍKLAD 3.3. *Vymyslete nejméně tři vektory o stejném počtu prvků a vytvořte jejich tři různé lineární kombinace.*

3.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

S pojmem *lineární kombinace* úzce souvisí pojmy *lineární závislost* a *lineární nezávislost* vektorů. Tyto pojmy používáme ve spojení se skupinou (množinou) vektorů



Obrázek 8: Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé, žádný z nich se nedá vyjádřit lineární kombinací ostatních

ze stejného vektorového prostoru (tj. všechny mají např. stejný počet souřadnic) a stručně znamenají toto: *Jestliže se ve skupině vektorů alespoň jeden z nich dá vyjádřit lineární kombinací ostatních, jedná se o vektory lineárně závislé. Pokud tomu tak není, tj. žádný vektor ze skupiny se nedá vyjádřit lineární kombinací ostatních, hovoříme o vektorech lineárně nezávislých.* Příkladem *lineárně závislých* vektorů jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ na Obr. 7. Příkladem *lineárně nezávislých* vektorů jsou potom vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ na Obr. 8

Definice 5 (Lineární závislost a nezávislost vektorů I). *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$, kde $k > 1$, z vektorového prostoru V nad tělesem T jsou lineárně závislé právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Pokud tomu tak není, tj. žádný z vektorů není lineární kombinací ostatních, jsou vektory lineárně nezávislé.*

Poznámka. Za pozornost stojí skutečnost, že v definici 5 není vůbec specifikováno, zda se jedná o lineární kombinaci **triviální** či **netriviální**. Jsou tedy přípustné obě varianty!

PŘÍKLAD 3.4. *Užitím definice 5 a poznámky, která je za ní uvedena, dokažte následující tvrzení:*

a) Je-li jeden z vektorů nulový, jsou vektory lineárně závislé.

b) Jsou-li aspoň dva vektory stejné, jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ závislé.

PŘÍKLAD 3.5. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů* $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, 3)$.

Řešení: Dle definice 5 bychom měli zjistit, zda lze některý z uvedených vektorů vyjádřit lineární kombinací ostatních. Tj. měli bychom prozkoumat, zda má smysl alespoň jeden z těchto zápisů:

$$\vec{v}_1 = a\vec{v}_2 + b\vec{v}_3, \quad \vec{v}_2 = c\vec{v}_1 + d\vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = e\vec{v}_1 + f\vec{v}_2,$$

kde $a, b, c, d, e, f \in R$. Naštěstí není nutné řešit každou z těchto tří rovnic zvlášť. Protože každou z nich lze snadno převést na homogenní tvar, konkrétně $\vec{v}_1 - a\vec{v}_2 - b\vec{v}_3 = \vec{o}$, $\vec{v}_2 - c\vec{v}_1 - d\vec{v}_3 = \vec{o}$, $\vec{v}_3 - e\vec{v}_1 - f\vec{v}_2 = \vec{o}$, stačí místo tří rovnic řešit jedinou ve tvaru

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{o}, \tag{10}$$

s neznámými $x, y, z \in R$. Při použití sloupcových vektorů můžeme po dosazení souřadnic daných vektorů psát rovnici (10) ve tvaru

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Po úpravě levé strany vynásobením a následným sečtení vektorů obě strany rovnosti (11) porovnáme. To vede k homogenní soustavě lineárních rovnic s maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

jejíž sloupcové vektory odpovídají daným vektorům (tato matice se tedy dá psát přímo ze zadání). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $z = k;\ k \in R$, pro zbývající neznámé platí $x = -2k, y = k$, tj. množinou řešení homogenní soustavy je $W = \{(-2k, k, k); k \in R\}$. Pro naše účely stačí použít jedno konkrétní řešení. Např. pro $k = -1$ dostáváme řešení $(2, -1, -1)$ a příslušná lineární kombinace má tvar

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{o}. \tag{13}$$

Dané vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ jsou tedy lineárně závislé. Z rovnosti (13) vidíme, že každý z těchto vektorů se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch zbývajících, konkrétně $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3$, $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$.

Je naprosto přirozené pokoušet se najít co nejsnazší cestu vedoucí k řešení dané úlohy. V tomto případě, kdy řešíme otázku, zda je daná skupina vektorů *lineárně závislá či nezávislá*, nám pomůže znalost lineární algebry. Rozhodující roli hraje matice (12). Pokud má hodnost menší než je počet neznámých, tj. vektorů (neznámými jsou sice koeficienty lineární kombinace, těch je ale stejně jako vektorů), má příslušná homogenní soustava i netriviální řešení a dané vektory jsou proto *lineárně závislé*. To je případ řešení tohoto příkladu. Pokud by však hodnost matice (12) byla rovna počtu neznámých, příslušná homogenní soustava by měla pouze triviální řešení a dané vektory by byly *lineárně nezávislé* (rovnice (10) by totiž byla splněna právě jenom tehdy, když jsou všechny koeficienty x, y, z rovny nule, tj. $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{o}$, pak ale nelze žádný z vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních).

Geometrické znázornění a algebraické řešení příkladu v programu GeoGebra najdete zde: https://www.geogebra.org/m/aktd8cez. Všimněte si, že všechny tři vektory leží v jedné rovině, což odpovídá tomu, že jsou lineárně závislé.

Významným poznatkem získaným řešením příkladu 3.5 je následující **efektivní metoda určení lineární závislosti či nezávislosti vektorů:** *Vektory uspořádáme do matice (je jedno, zda do sloupců či řádků), zjistíme její hodnost a porovnáme ji s počtem vektorů. Je-li menší, jsou vektory lineárně závislé, je-li stejná jako počet vektorů, jsou lineárně závislé.*

Poučeni řešením příkladu 3.5 můžeme vyslovit alternativní definici lineární závislosti a nezávislosti.

Definice 6 (Lineární závislost a nezávislost vektorů II). *Vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ *z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T *se nazývají:*
a) *vektory* **lineárně nezávislé**, *právě když je pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\forall\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge ... \wedge a_n = 0).$$

b) *vektory* **lineárně závislé**, *právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka. Lineární závislost či nezávislost jednoho vektoru. V obou definicích se hovoří o obecném počtu n vektorů, jejichž lineární závislost posuzujeme. Co kdyby ale bylo $n = 1$, tj. kdybychom rozhodovali o lineární závislosti jediného vektoru $\vec{u}_1$. Použijeme k tomu definici 6. Je-li vektor $\vec{u}_1$ nenulový, tj. $\vec{u}_1 \neq \vec{o}$, existuje pouze jeho triviální lineární kombinace (rozuměj násobek), která je rovna nulovému vektoru, tj. pouze $0\vec{u}_1 = \vec{o}$. Jeden **nenulový vektor je tedy vždy lineárně nezávislý**! V případě nulového vektoru, když $\vec{u}_1 = \vec{o}$, existuje samozřejmě nekonečně mnoho jeho netriviálních lineárních kombinací (násobků), které jsou rovny nulovému vektoru, např. $2020\vec{o} = \vec{o}$. Jeden **nulový vektor je tedy vždy lineárně závislý**!

PŘÍKLAD 3.6. *Množina* $M = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1), (1,2,3)\}$ *je tvořena čtyřmi vektory z vektorového prostoru* R^3. *Rozhodněte, zda jsou lineárně závislé či nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, najděte aspoň jednu jejich netriviální lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.*

Řešení: Řešení prvního úkolu, tj. rozhodnutí, zda jsou vektory lineárně závislé či nezávislé, je snadné. Vidíme, že počet vektorů 4 přesahuje počet jejich složek 3. Pokud je tedy uspořádáme do matice, jedno zda do sloupců či řádků, viz (14);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

její hodnost nebude moci být větší než 3 (zdůvodněte). Hodnost této matice tedy bude menší než počet vektorů. V souladu se závěrem z řešení příkladu 3.5 proto konstatujeme, že uvedené vektory jsou lineárně závislé.

Řešení druhého úkolu, nalezení netriviální lineární kombinace vektorů, která je rovna nulovému vektoru, bude vyžadovat více úsilí. I když v tomto konkrétním případě ne zas tak velkého. Označme dané vektory $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$ a $\vec{v}_4 = (1,2,3)$. Tyto vektory tvoří sloupce levé z matic (14). Z té se dá „vykoukat“, že platí $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{o}$. (Pokud bychom řešení neviděli hned, museli bychom řešit příslušnou soustavu homogenních rovnic, jako v případě předchozího příkladu 3.5 nebo následujícího 3.7.) Je tedy zřejmé, že každý z daných vektorů se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch zbývajících, například $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Ale pozor, ne vždy tomu tak je! Jak zjistíme řešením následujícího příkladu 3.7.

PŘÍKLAD 3.7. *Jsou dány vektory* $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$ *a* $\vec{v}_4 = (0,2,1)$. *Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících.*

Řešení: Poučeni řešením příkladu 3.5 se ptáme, zda existují takové koeficienty $k,l,m,n \in R$, pro které platí $k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 + n\vec{v}_4 = \vec{o}$. Po dosazení souřadnic vektorů můžeme psát

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Po vynásobení a sečtení na levé straně obě strany rovnosti (15) porovnáme. To vede k homogenní soustavě lineárních rovnic s maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad \begin{aligned} k &= 0 \\ l + 2n &= 0 \\ m - n &= 0 \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $n = t;\ t \in R$, pro zbývající neznámé platí $k = 0, l = -2t, m = t$, tj. množinou řešení homogenní soustavy je $W = \{(0,-2t,t,t); t \in R\}$. Pro naše účely stačí použít jedno konkrétní řešení. Např. pro $t = 1$ dostáváme řešení $(0,-2,1,1)$ a příslušná lineární kombinace má tvar

$$0\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{o}.$$

Z této rovnosti je zřejmé, že každý z vektorů $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících, např. $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_4$. Pro vektor $\vec{v}_1$ to však neplatí! Ten kvůli jeho nulovému koeficientu nemůžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Uvažujte dané vektory jako *geometrické vektory* reprezentované orientovanými úsečkami (šipkami) se společným počátečním bodem, totožným třeba s počátkem soustavy souřadnic. Jak můžeme výsledek řešení příkladu interpretovat pomocí jejich vzájemných poloh? Zobrazení v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/p6ze7qys.

PŘÍKLAD 3.8. *Jsou dány vektory* $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (0,3,1)$, $\vec{c} = (1,0,2)$ *a* $\vec{d} = (2,-1,-1)$. *Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících.*

Řešení: Řešte sami dle postupů řešení předchozích příkladů. Zde je zobrazení vektorů v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/dakpt7ps.

PŘÍKLAD 3.9. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů* $\vec{u}_1 = (1,0,2)$, $\vec{u}_2 = (-2,1,1)$, $\vec{u}_2 = (-1,1,0)$.

Řešení: Řešte sami. Využijte řešení příkladu 3.5. Zde je pro kontrolu řešení v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/za9m7feq.

Již umíme u dané skupiny vektorů určit, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé, nyní se ještě zamyslíme nad tím, **jaký vliv má na závislost či nezávislost skupiny vektorů přidání nebo odebrání vektoru**. Z definice 5 přímo vyplývá, že pokud ke lineárně nezávislým vektorům přidáme vektor, který je jejich lineární kombinací, vznikne skupina lineárně závislých vektorů a naopak, pokud ze skupiny lineárně závislých vektorů postupně odstraníme všechny vektory, které jsou lineární kombinací ostatních, dostaneme nakonec skupinu lineárně nezávislých vektorů. Pro další možné situace vyslovíme následující dvě věty.

Věta 4. *Jsou-li vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ $(k > 1)$ *z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T *lineárně nezávislé, dostaneme vynecháním kteréhokoliv z nich opět lineárně nezávislé vektory.*

Věta 5. *Jsou-li vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ *z vektorového prostoru* V *nad* T *lineárně závislé, jsou závislé i vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$, *kde* $\vec{u}_{k+1}$ *je libovolný vektor z* V.

PŘÍKLAD 3.10. *Pro každou z výše uvedených vět 4, 5 vytvořte alespoň jeden příklad, který ilustruje její tvrzení. Můžete k tomu použít GeoGebru.*

Na začátku kapitoly 3, konkrétně na straně 30, uvádíme, že v rovině stačí zvolit si dva různoběžné vektory (teď už víme, že to znamená *lineárně nezávislé vektory*) a každý další se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Toto tvrzení je založeno na geometrické představě a je podpořeno vizuálním vjemem získaným z Obr. 7. Nyní si, v řešení následujícího příkladu 3.11, toto tvrzení dokážeme užitím prostředků lineární algebry.

PŘÍKLAD 3.11. *Jsou dány dva lineárně nezávislé vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$. Dokažte, že každý vektor $\vec{u} \in V_2$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

Řešení: Označme souřadnice vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{u} = (u_1, u_2)$. Potom se ptáme, zda existují taková $k, l \in R$, pro která je $\vec{u} = k\vec{a} + l\vec{b}$. Po rozepsání této vektorové rovnice pro jednotlivé souřadnice dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých k, l :

$$\begin{aligned} a_1 k + b_1 l &= u_1 \\ a_2 k + b_2 l &= u_2 \end{aligned}$$

Tato soustava je pro lineárně nezávislé vektory $\vec{a}, \vec{b}$ regulární (proč?). Můžeme ji tak řešit třeba užitím Cramerova pravidla. Dostaneme: $k = \dfrac{u_1 b_2 - b_1 u_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$, $l = \dfrac{a_1 u_2 - u_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$. Koeficienty k, l jsou tedy pro dané vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{u}$ určeny jednoznačně.

PŘÍKLAD 3.12. *Jsou dány tři lineárně nezávislé vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$. Dokažte, že každý vektor $\vec{u} \in V_3$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

PŘÍKLAD 3.13. *Jaký je maximální počet lineárně nezávislých vektorů v prostorech V_2 a V_3? Pro svá tvrzení předložte věrohodné argumenty.*

3.3 Lineární obal množiny vektorů

Zajímá nás, jak vypadá množina všech lineárních kombinací daných vektorů. Říká se jí *lineární obal* dané skupiny vektorů. Lineárním obalem jednoho vektoru, tj. množinou všech jeho násobků, je zřejmě množina všech vektorů téhož směru. Můžeme ji znázornit přímkou, viz např. Obr. 6 na str. 29. Lineárním obalem dvou nezávislých vektorů je zřejmě rovina rovnoběžná s jejich směry. Lineárním obalem tří nezávislých vektorů je potom trojrozměrný prostor. Zkoumání těchto množin jsou věnovány následující příklady.

PŘÍKLAD 3.14. *Uvažujte vektory $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$ a $\vec{r} = k\vec{u} + l\vec{v}$ zobrazené v appletech https://www.geogebra.org/m/PsG8F0nH a https://www.geogebra.org/m/hrbzybj9. Charakterizujte množiny všech takovýchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů $k, l \in R$.*

Řešení: V obou případech se jedná o rovinu. V obou případech splňují množiny všech vektorů tvořících tuto rovinu (tj. všech vektorů, které jsou lineárními kombinacemi daných dvou) definici vektorového prostoru 3, viz str. 24. V prvním případě se jedná o vektorový prostor, v druhém případě jde o tzv. *vektorový podprostor*, podmnožinu prostoru V_3 dimenze 3, která sama splňuje definici vektorového prostoru (viz též řešení příkladu 3.18).

PŘÍKLAD 3.15. *Uvažujte vektor $\vec{q} = k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w}$ zobrazený v dynamickém appletu https://www.geogebra.org/m/KFL3Onq1. Charakterizujte množinu všech takovýchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů k, l, $m \in R$.*

Řešení: V tomto případě vektory (představujte si jejich koncové body) vyplňují celý trojrozměrný prostor. Jejich množina opět splňuje definici vektorového prostoru. Jedná se o vektorový prostor V_3 dimenze 3.

Definice 7 (Lineární obal množiny vektorů). *Nechť $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ je podmnožina vektorového prostoru V (tj. je to množina obsahující k vektorů o stejném počtu složek).* **Lineárním obalem** *množiny M rozumíme* **množinu všech lineárních kombinací** *vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Lineární obal množiny M značíme $[M]$ a platí, že $[M] \subseteq V$.*

Poznámka. Lineární obal množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ značíme dle potřeby buď $[M]$ nebo $[\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}]$.

PŘÍKLAD 3.16. *Určete lineární obaly $[M]$ pro následující množiny M:*

a) $M = \{(0,0)\}$,
b) $M = \{(1,2)\}$,
c) $M = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

PŘÍKLAD 3.17. *Uvažujme množinu $M = \{(2,-3,0),(1,0,3)\}$. Potom lineárním obalem $[M]$ množiny M je množina všech vektorů $\vec{v}$, které se dají zapsat ve tvaru $\vec{v} = a(2,-3,0) + b(1,0,3)$, kde $a, b \in R$.*

Řešení: Znázornění v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/wxVwhw9W

PŘÍKLAD 3.18. *Uvažujte množinu vektorů $M = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří její lineární obal (znázorněte si ho v GeoGebře). Podle definice 3 ověřte, zda to není vektorový prostor. Jaký je vztah $[M]$ k aritmetickému vektorovému prostoru R^3?*

Řešení: Lineárním obalem dané množiny vektorů je, stejně jako v příkladu 3.17, rovina procházející počátkem soustavy souřadnic (tj. bodem $(0,0,0)$) rovnoběžně se směry určenými vektory z množiny M. Ověřením jednotlivých vlastností uvedených ve definici 3 zjistíme, že se jedná o **vektorový prostor**. Přesněji hovoříme o **vektorovém podprostoru** vektorového prostoru R^3.

Věta 6. *Každý lineární obal je vektorovým prostorem.*

PŘÍKLAD 3.19. *Naznačte možný postup důkazu pravdivosti tvrzení věty 6.*

Zjistili jsme, že lineární obal množiny vektorů M je vektorovým prostorem, označme ho V. Platí tedy $[M] = V$. O vektorovém prostoru V potom můžeme říci, že je *lineárním obalem* množiny M. Jak ale popíšeme vztah množiny M vzhledem k V? Používá se k tomu pojem *množina generátorů* (též *systém generátorů*) vektorového prostoru V.

Definice 8 (Systém generátorů vektorového prostoru). *Nechť $[M] = V$, kde V je vektorový prostor. Množina M se potom nazývá* **množinou (systémem) generátorů** *vektorového prostoru V. Říkáme, že množina M generuje vektorový prostor V.*

PŘÍKLAD 3.20. *Najděte množiny generátorů pro následující vektorové prostory. Pokuste se najít množiny generátorů o nejmenším počtu vektorů.*

a) Množina všech vektorů (šipek) v rovině a v třírozměrném prostoru.

b) Aritmetický vektorový prostor R^2.

c) Aritmetický vektorový prostor R^1.

d) Aritmetický vektorový prostor R^3.

e) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R.

PŘÍKLAD 3.21. *Rozhodněte, zda platí uvedená tvrzení o lineárním obalu množiny M:*

a) $M = \{[2,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

b) $M = \{[2,1],[1,3]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

c) $M = \{[2,1],[4,2]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

d) $M = \{[1,2],[3,4],[1,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

e) $M = \{f(x) = 3\}$, $V = \{f(x) = c; c \in R\}$ *potom* $[M] = V$,

f) $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[-2,0,-1]\}$ *potom* $[M] = R^3$,

g) $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[8,-1,5]\}$ *potom* $[M] = R^3$.

3.4 Cvičení: Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů

1. Jsou dány vektory $\vec{a} = (1,2,3,4)$, $\vec{b} = (1,1,1,-1)$, $\vec{c} = (1,0,-2,-6)$. Vypočítejte:

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$,

b) $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$,

c) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

2. Zjistěte, která dvojice čísel c_1, c_2 splňuje vztah

a) $c_1(-3,4) + c_2(1,2) = (0,0)$;

b) $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{o}$, jestliže $\vec{a} = (2,-1)$, $\vec{b} = (-6,3)$, $\vec{o} = (0,0)$.

3. Zjistěte, při které hodnotě c je vektor $\vec{b} = (7,-2,c)$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1 = (2,3,5)$, $\vec{a}_2 = (3,7,8)$, $\vec{a}_3 = (1,-6,1)$.

4. Zjistěte, který z vektorů $\vec{a}_1 = (2,2,0,0,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,5,5,1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_3 = (1,1,1,1,0)$, $\vec{a}_4 = (1,1,-1,-1,-1)$, $\vec{a}_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

5. Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $q_1(x) = x+1$, $q_2(x) = x-1$, $q_3(x) = (x+1)^2$, $q_4(x) = (x+1)^3$, která je rovna polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$.

Nápověda: Při řešení úloh, kde v roli vektorů vystupují polynomy (není to nic divného, množina $P_n(x)$ polynomů stupně nejvýše n je vektorovým prostorem) můžeme využít *izomorfismus* (vzájemně jednoznačné zobrazení) prostoru $P_n(x)$ s aritmetickým vektorovým prostorem R^{n+1} (Pozor, prostor je dimenze $n+1$! Víte proč?). Každému polynomu $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ můžeme, při dohodě o uspořádání jeho členů, jednoznačně přiřadit uspořádanou $(n+1)$-tici (aritmetický vektor) $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in R^{n+1}$ a naopak, každé takové $(n+1)$-tici polynom stupně n.

Konkrétně pro tento příklad platí $q_1(x) = x+1 \longrightarrow (0,0,1,1)$, $q_2(x) = x-1 \longrightarrow (0,0,1,-1)$, $q_3(x) = (x+1)^2 = x^2+2x+1 \longrightarrow (0,1,2,1)$, $q_4(x) = (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 \longrightarrow (1,3,3,1)$, $p(x) = x^3-2x+3 \longrightarrow (1,0,-2,3)$. Původní zadání tak nahradíme jiným, ovšem s ním ekvivalentním, které je pro nás jednodušší. Řešíme úkol nalézt koeficienty lineární kombinace vektorů $(0,0,1,1)$, $(0,0,1,-1)$, $(0,1,2,1)$ a $(1,3,3,1)$, která je rovna vektoru $(1,0,-2,3)$. Samozřejmě, toto není jediný možný postup. Příklad můžeme vyřešit i bez využití aritmetických vektorů, přímými výpočty s danými polynomy. Pro provedení lineární kombinace polynomů potřebujeme akorát mít definované příslušné dvě operace, násobení polynomu reálným číslem a sčítání polynomů (samozřejmě se stejnou proměnnou, bavíme se stále o polynomech jedné proměnné). Na tom však nic není, operace provádíme obvyklým způsobem, známým ze střední školy. Jedninou nevýhodou přímých výpočtů s polynomy je jejich pracnost.

6. Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $a_1(x) = 1 - 3x + 2x^2$, $a_2(x) = 1 + x + 4x^2$, $a_3(x) = 1 + 7x^2$, která je rovna polynomu $b(x) = 3 - 2x + x^2$.

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.

a) $\vec{a} = (2,5,7)$, $\vec{b} = (6,3,4)$, $\vec{c} = (5,-2,3)$,

b) $\vec{a} = (6,4,2)$, $\vec{b} = (-9,6,3)$, $\vec{c} = (-3,6,3)$.

c) $\vec{a} = (-1,0,3)$, $\vec{b} = (4,2,0)$, $\vec{c} = (-5,-1,9)$.

d) $\vec{a} = (1,3,5)$, $\vec{b} = (2,4,6)$,

e) $\vec{a} = (3,-8,1)$, $\vec{b} = (-6,16,-2)$,

f) $\vec{a} = (3,2,7)$, $\vec{b} = (1,1,1)$, $\vec{c} = (2,0,3)$,

g) $\vec{a} = (3,2,0)$, $\vec{b} = (1,1,1)$, $\vec{c} = (5,4,2)$,

h) $\vec{a} = (1,0,0,0)$, $\vec{b} = (2,1,0,1)$, $\vec{c} = (3,2,1,1)$,

i) $\vec{a} = (3,0,1,0)$, $\vec{b} = (0,3,0,1)$, $\vec{c} = (0,1,0,3)$, $\vec{d} = (1,0,3,0)$.

8. Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé i tyto vektory:

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \quad \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}, \quad 3\vec{u}+\vec{v}.$$

Nápověda: I když tato úloha vypadá záhadně, její řešení je překvapivě jednoduché. Avšak pozor, za touto jednoduchostí se skrývají solidní znalosti základů lineární algebry! ☺

Nejprve si uvažované vektory pojmenujeme: $\vec{a} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{b} = \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}$, $\vec{c} = 3\vec{u}+\vec{v}$. Jsou-li lineárně nezávislé, je dle definice 6 (str. 34) rovna nulovému vektoru pouze jejich triviální lineární kombinace, tj. rovnice

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{o} \tag{16}$$

má jediné řešení ve tvaru $(x,y,z) = (0,0,0)$. Nyní se vrátíme k původním vektorům a příslušné jejich lineární kombinace do rovnice (16) dosadíme

$$x(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) + y(\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}) + z(3\vec{u}+\vec{v}) = \vec{o}, \tag{17}$$

roznásobíme

$$x\vec{u} + x\vec{v} + x\vec{w} + y\vec{u} - y\vec{v} - 2y\vec{w} + 3z\vec{u} + z\vec{v} = \vec{o} \tag{18}$$

a upravíme

$$\vec{u}(x+y+3z) + \vec{v}(x-y+z) + \vec{w}(x-2y) = \vec{o}. \tag{19}$$

Protože ze zadání víme, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé (o těchto vektorech to víme, o vektorech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ to zjišťujeme), víme také to, že rovnice (19) je splněna jedině tehdy, když jsou všechny tři koeficienty na levé straně rovny nule, tj. když

$$\begin{aligned} x+y+3z &= 0, \\ x-y+z &= 0, \\ x-2y &= 0. \end{aligned}$$

Této homogenní soustavě potom přísluší matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

jejíž hodnost je 2 (spočítejte sami). Zde uvádím výpočet hodnosti v programu pro algebraické výpočty wxMaxima, který si můžete zdarma stáhnout na adrese https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/:

(% i1) A:matrix([1,1,3],[1,-1,1],[1,-2,0]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i2) rank(A);

$$2 \tag{\% o2}$$

To, že hodnost matice je menší než její řád (tj. matice je singulární) ale znamená, že výše uvedená soustava má i netriviální řešení pro x, y, z. Potom ale i rovnice 16, s níž je soustava ekvivalentní, má i netriviální řešení. Z toho vyplývá, že dané vektory $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad 3\vec{u} + \vec{v}$ jsou lineárně závislé!

9. Nechť $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou tyto vektory lineárně nezávislé:

$$2\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + 3\vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

10. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x.$$

11. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x,\ p_4(x) = x^2 - 1.$$

12. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$f_1(x) = x^2 - 3,\ f_2(x) = 2 - x,\ f_3(x) = (x - 1)^2.$$

Příklady pro dobrovolné řešení

Následující příklady jsou doplňkové, určené pro dobrovolné řešení. Rozhodně však stojí za pozornost. Pokud Vám budou v souvislosti s pojmy lineární kombinace, závislost a nezávislost připadat podivné, vraťte se k podstatě těchto pojmů. Lineární kombinací objektů $\heartsuit$, $\spadesuit$ a $\clubsuit$ rozumíme výraz $k\heartsuit + l\spadesuit + m\clubsuit$, kde $k, l, m \in R$.

13. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) množiny funkcí:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x.$$

14. Rozhodněte, zda jsou dané funkce lineárně závislé či nezávislé:

a) $2 - x^2,\ 3x,\ x^2 + x - 2,$
b) $3x - 1,\ x(2x+1),\ x(x-1),$
c) $e^x,\ e^{x+1},$
d) $\sin x,\ \sin(x+1),$
e) $e^x,\ e^{x+1},\ e^{x+2},$
f) $\sin x,\ \sin(x+1),\ \sin(x+2),$
g) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
h) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x},$

15. Nechť vektory $\mathbf{u} = \cos^2 x$, $\mathbf{v} = \sin^2 x$ tvoří bázi vektorového prostoru V. Zjistěte, který z uvedených vektorů leží ve V:

a) $2,$
b) $\sin 2x,$
c) $0,$
d) $\cos 2x,$
e) $2 + 3x,$
f) $3 - 4\cos 2x.$