4 Báze vektorového prostoru

V kapitole 3 jsme se na straně 30 zamýšleli nad tím, že je užitečné uvažovat množinu (systém) generátorů vektorového prostoru o minimálním nutném počtu vektorů, který je potřebný pro vytvoření všech vektorů onoho vektorového prostoru (tj. pro „generování“ tohoto prostoru). Tuto množinu generátorů jsme nazvali *báze vektorového prostoru.* V této kapitole se budeme pojmu *báze*[2] vektorového prostoru věnovat podrobněji. Nejprve vyslovíme definici báze a dokážeme si, že každý vektor daného prostoru lze vzhledem k bázi vyjádřit jediným způsobem. Tato vlastnost se později ukáže jako klíčová pro zavedení pojmu *souřadnice vektoru vzhledem k bázi.* S pojmem báze souvisí též pojem *dimenze* vektorového prostoru. Je to, jednoduše řečeno, číslo, které udává počet vektorů báze uvažovaného prostoru. Dimenze je pro daný vektorový prostor unikátní. Je to dáno tím, že ačkoliv lze pro daný vektorový prostor vytvořit nekonečně mnoho bází, všechny mají stejný počet vektorů.

Následující definicí zavádíme *bázi* vektorového prostoru jako takovou množinu generátorů tohoto prostoru, která je tvořena *lineárně nezávislými* vektory.

Definice 9 (Báze vektorového prostoru). *Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá* **báze vektorového prostoru** V*, právě když:*

1. $[M] = V$ *(tj. M je množinou generátorů prostoru V),*

2. M *je* **lineárně nezávislá** *množina.*

Pro pozdější zavedení pojmu *souřadnice vektoru vzhledem k bázi*, viz definice 11 na str. 50 je klíčová skutečnost, že konkrétní vektor lze vzhledem ke konkrétní bázi vyjádřit jediným způsobem.

Věta 7 (O jedinečnosti souřadnic vzhledem k bázi). *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát* **právě jedním způsobem** *jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj.*

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in M, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in T;\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i.$$

Důkaz. Větu 7 dokážeme sporem. Předpokládáme, že platí její negace, tj., že každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát **aspoň dvěma různými způsoby** jako lineární kombinaci vektorů báze M, a pokusíme se z ní odvodit sporné tvrzení. Pro zjednodušení zápisu se omezíme na prostor V_3, zobecnnění na V_n bude potom zřejmé. Pro každý vektor $\vec{u}$ tedy existují aspoň dvě různé trojice koeficientů a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 takové, že

$$\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 \quad \text{a zrove} \quad \vec{u} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3.$$

Pokud od sebe tyto dvě rovnosti odečteme, dostaneme

$$(b_1 - a_1)\vec{u}_1 + (b_2 - a_2)\vec{u}_2 + (b_3 - a_3)\vec{u}_3 = \vec{o}. \tag{21}$$

[2]Pro další studium viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Basis$_{(linear_algebra})$

Dle předpokladu jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé. Jediná jejich lineární kombinace, která může být rovna nulovému vektoru je tak triviální lineární kombinace. Rovnost (21) je potom splněna právě tehdy, když jsou všechny tři koeficienty $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ rovny nule. To může ale nastat jedině tehdy, když $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ a $b_3 = a_3$. Tím dostáváme spor s předpokladem, že trojice a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 jsou různé. □

4.1 Dimenze vektorového prostoru

S pojmem *dimenze*[3] jsme se všichni setkali již mnohokrát. Omezme se zde na geometrický význam tohoto slova. Dimenzí rozumíme *číslo*, které udává počet nezávislých směrů, které potřebujete pro *pohyb* v daném prostoru.

Pokud žijete na přímce, vystačíte s jedním směrem, reprezentovaným jedním vektorem, např. $\vec{u}$. Veškeré přemisťování po přímce vyřídíte potom pomocí násobků $k\vec{u}$, viz Obr. 6 na str. 29. Přímka má proto dimenzi 1!

Pokud žijete v rovině, potřebujete k přemisťování po ní dva nezávislé směry, tj. dva lineárně nezávislé vektory, např. $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Každé přesunutí můžete potom vyjádřit pomocí jejich lineární kombinace $k\vec{u} + l\vec{v}$, viz Obr. 7 na str. 29. Rovina má proto dimenzi 2!

Pokud žijete v prostoru, v němž žijeme, potřebujete k přemisťování v něm tři nezávislé směry, tj. tři lineárně nezávislé vektory, dva pro pohyb v rovině, ten třetí pro pohyb „nahoru“ a „dolů“, např. $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Každé přemístění můžete potom vyjádřit pomocí jejich lineární kombinace $k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w}$. Náš životní prostor má proto dimenzi 3!

Definice 10 (**Dimenze vektorového prostoru**). *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má* **konečnou dimenzi**, *jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V (tj. můžeme říci, že V je konečně generovaný).* **Dimenzí** *vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze (tj. jeho systému generátorů tvořeného lineárně nezávislými vektory). Značíme*

$$\dim V = n \qquad \text{nebo} \qquad V_n.$$

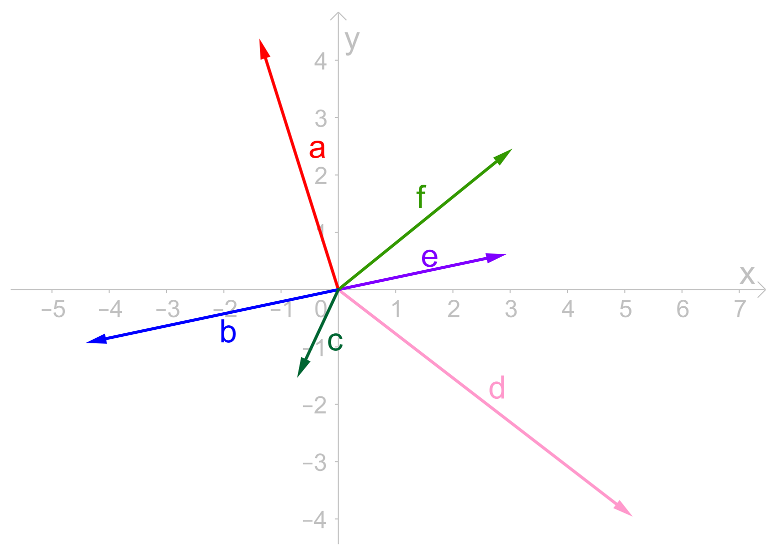
Například informaci o tom, že vektorový prostor V má dimenzi 3 zapíšeme ve tvaru rovnosti: $\dim V = 3$, nebo zkráceně pomocí dolního indexu: V_3.

Věta 8 (**O existenci báze**). *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor má* **aspoň jednu konečnou bázi**.

Důkaz. Naznačíme pouze myšlenku důkazu, viz Obr. 9. Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ představují množinu generátorů vektorového prostoru V_2. Jsou evidentně lineárně závislé. Nyní vezměte tužku a postupně (po jednom) vyškrtávejte vektory, které se

[3] Pro další studium viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Dimension

dají vyjádřit jako lineární kombinace ostatních. Měly by Vám zůstat dva lineárně nezávislé vektory, ty tvoří bázi prostoru V_2. Všimněte si, že popsaným způsobem můžete dospět k různým takovýmto dvojicím. To je projev toho, že neexistuje jenom jedna báze vektorového prostoru. Všechny ale, jak víme, mají stejný počet vektorů!



Obrázek 9: Kolik lineárně nezávislých vektorů zůstane po postupném odstranění těch, které se dají vyjádřit jako lineární kombinace ostatních?

Důkaz věty je založen na popsaném mechanismu. Máme-li konečnou množinu generátorů, je jisté, že dříve nebo později se z ní uvedeným postupem proškrtáme až k bázi. □

Důsledek 1. *Odstraníme-li ze systému generátorů vektorového prostoru V vektor, který je lineární kombinací ostatních, pak množina zbývajících vektorů je opět systémem generátorů vektorového prostoru V.*

PŘÍKLAD 4.1. *Rozhodněte, zda je daná množina vektorů systémem generátorů, nebo přímo bází, vektorového prostoru R^3.*

a) $(1,2,3),(1,2,1),(-1,1,0),(2,-1,0)$,

b) $(1,2,3),(1,2,1),(0,0,2),(1,2,-1)$.

Řešení: Na první pohled je zřejmé, že ani jedna z uvedených množin není bází. Maximální počet nazávislých uspořádaných trojic reálných čísel je 3. Je-li jich více, jsou vždycky závislé (Souvisí to s počtem řešení příslušné homogenní soustavy rovnic. Zdůvodněte!). Zbývá vyšetřit, zda se jedná alespoň o systémy generátorů prostoru R^3. Zkoumáme proto, zda lze každý vektor $\vec{v} \in R^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci daných čtyř vektorů.

ad a)

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Rovnice (22) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{cccr|c}1&1&-1&2&v_1\\2&2&1&-1&v_2\\3&1&0&0&v_3\end{array}\right]$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{cccr|c}1&1&-1&2&v_1\\2&2&1&-1&v_2\\3&1&0&0&v_3\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{cccr|r}1&1&-1&2&v_1\\0&2&-3&6&3v_1-v_3\\0&0&3&-5&-2v_1+v_2\end{array}\right].$$

Má-li mít příslušná soustava lineárních rovnic řešení (protože je rovnic méně než neznámých, jedno mít nemůže, tak je ve hře nekonečně mnoho řešení) nezávisle na volbě vektoru $\vec{v}$, musí mít matice soustavy dle Frobeniovy věty hodnost 3 (tj. rovnu dimenzi vektorového prostoru R^3, jehož mají být vektory systémem generátorů). Tato podmínka je evidentně splněna. Můžeme tedy říci, že daná množina vektorů je systémem generátorů vektorového prostoru R^3. Vektory jsou zobrazeny na Obr. 10. Viz též příslušný applet https://www.geogebra.org/m/wptxscy7. Vidíme, že v souladu s výsledkem algebraického řešení neleží všechny v jedné rovině (dokonce žádné tři neleží v jedné rovině). V duchu důkazu věty 8 bychom tak vyškrtnutím jednoho z nich získali tři lineárně nezávislé vektory.

ad b)

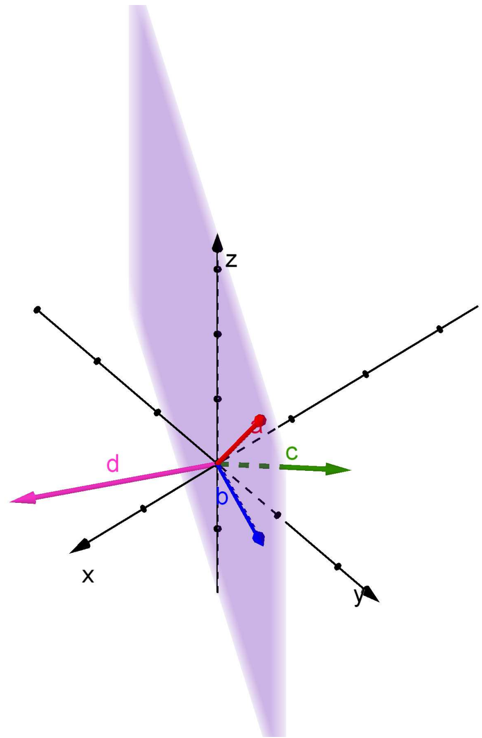
$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Rovnice (23) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{cccr|c}1&1&0&1&v_1\\2&2&0&2&v_2\\3&1&2&-1&v_3\end{array}\right]$$

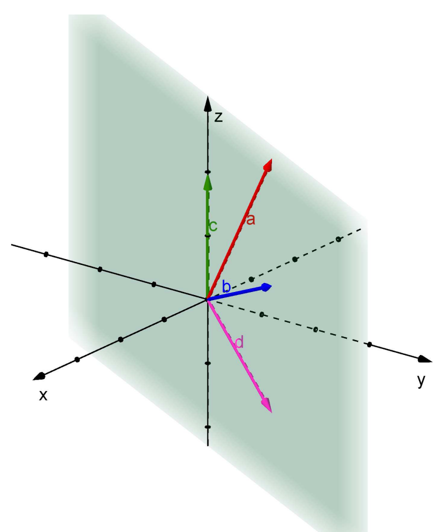
(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{cccr|c}1&1&0&1&v_1\\2&2&0&2&v_2\\3&1&2&-1&v_3\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{crcr|r}1&1&0&1&v_1\\0&-2&2&-4&-3v_1+v_3\\0&0&0&0&-2v_1+v_2\end{array}\right].$$



Obrázek 10: Množina vektorů $(1,2,3),(1,2,1),(-1,1,0),(2,-1,0)$ generuje prostor dimenze 3

Matice příslušné soustavy lineárních rovnic má hodnost 2. Rozšířená matice soustavy má až na případ, kdy $v_2 = 2v_1$, hodnost 3. Dle Frobeniovy věty tedy příslušná soustava nemá pro všechny vektory $\vec{v} \in R^3$ řešení (soustava má řešení pouze pro takové vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pro které je $v_2 = 2v_1$, my ale potřebujeme, aby měla řešení pro jakýkoliv vektor $\vec{v}$). Daná množina vektorů není systémem generátorů vektorového prostoru R^3. Vektory jsou zobrazeny na Obr. 11. Viz též příslušný applet https://www.geogebra.org/m/rqs3zxvs. Vidíme, že, opět v souladu s výsledkem algebraického řešení, leží všechny čtyři vektory v jedné rovině. V duchu důkazu věty 8 bychom tak vyškrtnutím dvou z nich získali dva lineárně nezávislé vektory.

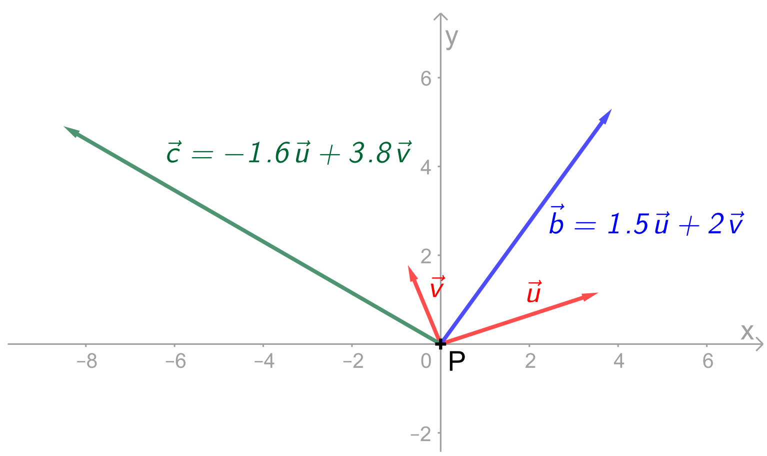


Obrázek 11: Množina vektorů $(1,2,3),(1,2,1),(0,0,2),(1,2,-1)$ generuje prostor dimenze 2

Poznámka. Příklad 4.1 můžeme řešit i rychleji, pouze s využitím matic, jejichž sloupce (nebo řádky) jsou dané vektory. Navrhněte a zdůvodněte postup takového řešení.

4.2 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Jak víme, konkrétní vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů konkrétní báze jediným způsobem, viz věta 7 na str. 44. Koeficienty takové lineární kombinace tak daný vektor vzhledem k dané bázi jednoznačně identifikují. Říkáme, že jsou jeho *souřadnicemi* vzhledem k této bázi. Tak můžeme říci, že vektor $\vec{b}$ na Obr. 12 má vzhledem k bázi $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ souřadnice $(1.5, 2)$, zatímco vektor $\vec{c}$ má vzhledem k ní souřadnice $(-1.6, 3.8)$. Víme, že bází daného vektorového prostoru můžeme vytvořit nekonečně mnoho (například pro rovinu jsou to všechny možné dvojice lineárně nezávislých vektorů). Potom ke každé z nich jsou souřadnice daného vektoru jiné! Vždy je tedy třeba vědět, vzhledem k jaké bázi jsou příslušné souřadnice dány. Pro prostory R^n se používá převážně (ve školní matematice jedině) tzv. *kanonická báze*, nejjednodušší báze, jakou můžeme vytvořit. Pro R^2 je to $\{(1,0),(0,1)\}$, pro R^3 je to $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ atd.



Obrázek 12: Souřadnice vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ vzhledem k bázi $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Dle věty 7 lze vektor $\vec{u} \in V$ psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ vektorového prostoru V. Jinak řečeno, koeficienty $x_1, x_2, ..., x_n \in T$ lineární kombinace

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

jsou pro daný vektor $\vec{u}$ a danou bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ určeny jednoznačně. Tyto koeficienty, konkrétně uspořádanou n–tici (tj. aritmetický vektor) z nich vytvořenou, nazýváme *souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M*.

Definice 11 (Souřadnice vektoru vzhledem k bázi). *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý vektor $\vec{u} \in V$ lze napsat jednoznačně ve tvaru*

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ nazveme souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M a značíme

$$\vec{u}_M = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

PŘÍKLAD 4.2. *Množina $M = \{(1,1),(2,3)\}$ je bází vektorového prostoru R^2. Určete souřadnice $\vec{u}_M$ vektoru $\vec{u}$ vzhledem k této bázi, znáte-li jeho souřadnice $\vec{u} = (7,12)$ vzhledem ke kanonické bázi $\{(1,0),(0,1)\}$.*

Řešení: Dle definice 11 hledáme koeficienty $x, y \in R$ lineární kombinace $\vec{u} = x(1,1) + y(2,3)$. Protože zároveň platí $\vec{u} = 7(1,0) + 12(0,1)$, můžeme psát

$$\vec{u} = x(1,1) + y(2,3) = 7(1,0) + 12(0,1), \tag{24}$$

po úpravě

$$\vec{u} = x(1,1) + y(2,3) = (7,12). \tag{25}$$

Rovnici (25) po další úpravě můžeme přepsat do podoby s ní ekvivalentní soustavy dvou rovnic o neznámých x, y

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7, \\ x + 3y &= 12, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $(x,y) = (-3,5)$. Pro vektor $\vec{u} = (7,12) \in R^2$ tak platí

$$\vec{u} = -3(1,1) + 5(2,3).$$

Hledané souřadnice vektoru $\vec{u} = (7,12)$ vzhledem k bázi M jsou proto $(-3,5)$, píšeme

$$\vec{u}_M = (-3,5).$$

Připomeňme si ještě pojem **kanonická báze**, který jsme v této kapitole začali používat. Jedná se o bázi, vzhledem k níž určujeme souřadnice vektorů, není-li uvedeno jinak. Později si kanonickou bázi uvedeme jako příklad tzv. *ortonormální* báze, jejíž použití přináší určité výhody, viz definice 18 na str. 70. V případě vektorového prostoru R^2 je kanonickou bází množina $\{(1,0),(0,1)\}$. Pro R^3 je potom kanonickou bází množina vektorů $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ atd.

PŘÍKLAD 4.3. *Ověřte, že vektory*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru R^4. Potom určete souřadnice vektoru

$$\vec{x} = (4, -2, 1, 5)^T$$

vzhledem k této bázi.

Řešení: Vyjděte z definice 9. Ověřte, zda jsou dané vektory nezávislé, potom najděte koeficienty požadované lineární kombinace.

Poznámka: Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k dané bázi je příkladem **izomorfismu**, tj. lineárního zobrazení, které je vzájemně jednoznačné. Pro danou bázi existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi vektorem a jeho souřadnicemi. Máme-li vektor, lze mu přiřadit jediné souřadnice vzhledem k této bázi a naopak, máme-li souřadnice, existuje jediný vektor, které je k dané bázi má.

4.3 Podprostor vektorového prostoru

Na pojem vektorový *podprostor* jsme už několikrát narazili. Jedná se o podmnožinu vektorového prostoru, která sama o sobě splňuje definici 3 vektorového prostoru, viz str. 24. Všimněte si například Obr. 11 na str. 48, nebo si otevřete jemu příslušející applet https://www.geogebra.org/m/rqs3zxvs. Všechny čtyři vektory leží v jedné rovině. Představují množinu generátorů vektorového podprostoru, který je tvořen všemi vektory majícími směr rovnoběžný s touto rovinou (ta rovina je názorným modelem tohoto podprostoru). Kdybychom vhodně odstranili dva z nich, dostali bychom bázi tohoto podprostoru. Jeho dimenze je 2.

Definice 12 (Podprostor vektorového prostoru). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Řekneme, že W je* **podprostor** *vektorového prostoru V, právě tehdy když platí:*

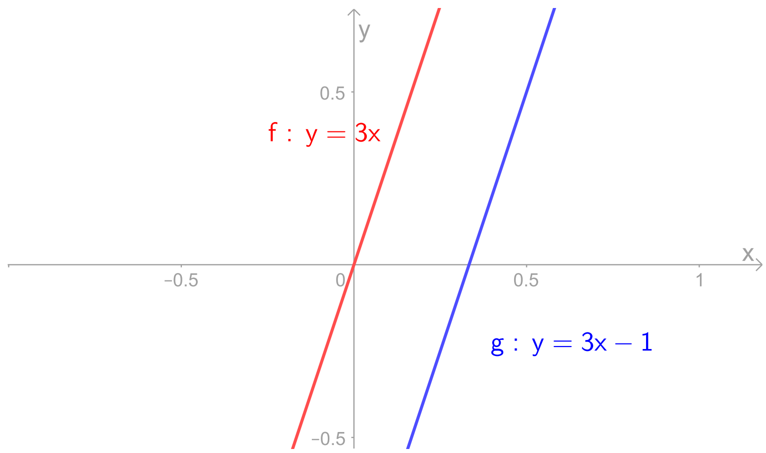
1. W **je neprázdná podmnožina** V *($W \subseteq V \wedge W \neq \emptyset$.)*

2. W **je vektorovým prostorem** *vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem z tělesa T, které jsou definované na V (tj. splňuje definici 3 vektorového prostoru).*

Skutečnost, že W je podprostorem vektorového prostoru V značíme takto:

$$W \subseteq\subseteq V.$$

Poznámka. Význam pojmů uvedených v definici si můžeme ilustrovat na příkladu množiny $U = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$, která je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $V = R^2$ definovaného nad tělesem $T = R$, tj. $U \subseteq\subseteq V$.



Obrázek 13: Jedná se v obou případech o vektorové podprostory?

PŘÍKLAD 4.4. *Rozhodněte, zda je množina $W = \{(x, y) \in R^2; y = 3x - 1\}$ vektorovým podprostorem prostoru R^2 (tj. zda platí $W \subseteq\subseteq R^2$).*

Z definice vektorového prostoru 3 vyplývá **nutná podmínka existence vektorového podprostoru:** *Vektorový podprostor $W \subseteq\subseteq V$ musí obsahovat nulový vektor z prostoru V.* Její užitečnost se, jak to tak u nutných podmínek bývá, projeví v okamžiku, kdy není splněna. To máme totiž jistotu, že vyšetřovaná podmnožina W není vektorovým podprostorem. Pokud splněna je, žádnou jistotu nemáme.

Nad definicí 12 je dobré si promyslet podobu *extrémních* podprostorů:

„Nejmenším“ podprostorem je **triviální vektorový prostor** $\{\vec{o}\}$, tj. množina obsahující jediný prvek, nulový vektor $\vec{o}$.

„Největším“ podprostorem je potom prostor V samotný (protože, jak víme, množina je sama sobě podmnožinou).

Občas se setkáme s úkolem, rozhodnout, zda je nějaká podmnožina vektorového prostoru jeho podprostorem. Je proto dobré, ujasnit si, co je třeba pro to udělat. Jak říká následující věta 9, není naštěstí nutné ověřit celou definici 3 (viz str. 24). Podmnožina totiž přirozeně přebírá (dědí) některé vlastnosti od své mateřské množiny. Například, pokud je sčítání vektorů komutativní ve V, je samozřejmě komutativní i v $W \subseteq\subseteq V$.

Věta 9 (O určení vektorového podprostoru). *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí:*

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W$,

(2) $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W$.

PŘÍKLAD 4.5. *Ověřte, zda $W_i \subseteq\subseteq (R^3, +, R)$:*

a) $W_1 = \{[r, 2r, 5r]; r \in R\}$,

b) $W_2 = \{[r, 2r, r^2]; r \in R\}$,

c) $W_3 = \{[r, 2r, 1]; r \in R\}$.

Řešení: Naznačíme si postup řešení pro zadání a). Postupujeme podle věty 9. Vyjádříme si dva vektory z W_1; $\vec{u} = [r_1, 2r_1, 5r_1]$, $\vec{v} = [r_2, 2r_2, 5r_2]$ a ověříme, zda splňují ony dvě vlastnosti (1) a (2) z věty 9.

Ad (1): Ověříme, zda $\vec{u} + \vec{v}$ patří do W_1. Platí

$$\vec{u} + \vec{v} = [r_1 + r_2, 2(r_1 + r_2), 5(r_1 + r_2)].$$

Pokud nahradíme $r_1 + r_2 \in R$ symbolem p; $p \in R$, můžeme psát

$$\vec{u} + \vec{v} = [p, 2p, 5p],$$

což je předpis pro podobu uspořádané trojice patřící do W_1. Proto $\vec{u} + \vec{v} \in W_1$.

Ad (2): Ověříme, zda $a\vec{u}$, kde $a \in R$ patří do W_1. Platí

$$a\vec{u} = [ar, 2ar, 5ar].$$

Pokud nahradíme $ar \in R$ symbolem q; $q \in R$, můžeme psát

$$a\vec{u} = [q, 2q, 5q],$$

což je předpis pro podobu uspořádané trojice patřící do W_1. Proto $a\vec{u} \in W_1$.
Tím jsme prokázali, že $W_i \subseteq\subseteq R^3$.

Zbývající dvě zadání příkladu 4.5 řešte sami.

PŘÍKLAD 4.6. *Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory prostoru R^3 nad $\mathbb{R}$.*

(a) Množina všech řešení (x, y, z) rovnice $3x + 2y - z = 0$.

(b) Množina všech lineárních kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (2, -3, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 3)$.

Proveďte geometrickou interpretaci daných množin (podprostorů).

V závěru kapitoly věnované bázi vektorového prostoru je vhodné připomenout si dvě vlastnosti báze, na které jsme již narazili, ale dosud jsme je nijak nedokazovali:

(i) **Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.**

(ii) **Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.**

Důkazy obou těchto tvrzení se dají elegantně provést jako důsledky tzv. *Steinitzovy věta o výměně*, které je věnována následující kapitola. Protože však její obsah nebude kromě těchto důsledků nijak využit v následujících pasážích, je její studium čistě dobrovolné.

4.4 Steinitzova věta o výměně*

Studium této kapitoly je dobrovolné. Znalosti věty a jejího důkazu nebudou vyžadovány u zkoušky. Je třeba znát akorát její výše uvedené důsledky.

Tato věta je pro nás důležitá hlavně svými důsledky. Plynou z ní například tyto skutečnosti:

I. Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

II. Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.

Příklad: Množina M je systémem generátorů příslušného vektorového prostoru. Je možné nahradit některé vektory z M vektory z množiny N tak, aby výsledná množina opět generovala ten samý vektorový prostor?

a) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\}$, $N = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$,

b) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\}$, $N = \{(0,1,2),(2,0,2)\}$.

Věta 10 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je* **množina generátorů** *prostoru V a nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ jsou* **libovolné lineárně nezávislé vektory** *z V. Potom platí:*

1) $k \leq n$,

2) *při* **vhodném přečíslování** *vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme prvních k z nich nahradit vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ tak, že množina $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{u}_{k+2}, ..., \vec{u}_n\}$ je* **systémem generátorů** *vektorového prostoru V.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k (tj. podle počtu lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_i$).

I. Dokážeme, že věta je pravdivá pro $k = 1$

Máme tedy dokázat, že je-li $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ množina generátorů prostoru V a $\vec{v}_1$ je libovolný lineárně nezávislý vektor z V, potom:
(1) $1 \leq n$,
(2) při vhodném uspořádání mohu první vektor z množiny $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ nahradit vektorem $\vec{v}_1$.

Je zřejmé, že tvrzení (1) platí; pro všechna $n \in N$ je skutečně $1 \leq n$.
Zaměříme se tedy na důkaz tvrzení (2). To, že $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je množina generátorů prostoru V lze zapsat rovností $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$. Potom chceme dokázat, že z předpokladů věty vyplývá, že platí také rovnost $[\vec{v}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$ (tj., že vektor $\vec{u}_1$ můžeme nahradit vektorem $\vec{v}_1$).

Protože $\vec{v}_1 \in V$, lze vektor $\vec{v}_1$ psát jako lineární kombinaci

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + ... + a_n\vec{u}_n. \tag{26}$$

Potom ovšem platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud k ní přidáme vektor, který je lineární kombinací jejích vektorů). Vektor $\vec{v}_1$ je dle předpokladů věty lineárně nezávislý a proto nemůže být nulový. Alespoň jeden z koeficientů a_i lineární kombinace (26) tak musí být různý od nuly. Věta připouští vhodné uspořádání vektorů $\vec{u}_i$, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je a_1. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{a_1}\vec{v}_1 - \frac{a_2}{a_1}\vec{u}_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor V platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Dokázali jsme tak, že lze opravdu při vhodném uspořádání vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ první z nich nahradit vektorem $\vec{v}_1$ a výsledná množina bude stále množinou generátorů prostoru V.

II. Dokážeme, že pokud věta platí pro $k = m$, platí i pro $k = m + 1$

Mějme na paměti, že v tomto kroku (říká se mu „indukční krok“) dokazujeme pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m+1)$ (kde symbolem $SV(j)$ rozumíme výrok „Steinitzova věta je pravdivá pro $k = j$“) nikoliv pravdivost samotného tvrzení věty. Předpokládáme tedy, že pro $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$ a m lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ z V je (1) $m \leq n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V$. Chceme dokázat, že potom platí i to, že máme-li $m+1$ lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ z V, je (1) $m+1 \leq n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..$ V.

Protože $\vec{v}_{m+1} \in V$, lze vektor $\vec{v}_{m+1}$ psát jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$, $\vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n$, tj.

$$\vec{v}_{m+1} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_m\vec{v}_m + a_{m+1}\vec{u}_{m+1} + \cdots + a_n\vec{u}_n \tag{27}$$

a platí

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V.$$

Protože vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ jsou lineárně nezávislé, je zřejmé, že alespoň jeden z koeficientů $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ lineární kombinace (27) je různý od nuly (promyslete si detailní zdůvodnění). Věta připouští vhodné uspořádání vektorů množiny generátorů, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je a_{m+1}. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_{m+1}$ vyjádřit z rovnosti (27) jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}}\vec{v}_{m+1} - \frac{b_1}{a_{m+1}}\vec{v}_1 - \frac{b_2}{a_{m+1}}\vec{v}_2 - \ldots - \frac{b_m}{a_{m+1}}\vec{v}_m - \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\vec{u}_{m+2} - \ldots - \frac{a_n}{a_{m+1}}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor V platí

$$\begin{aligned}\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \ldots, \vec{u}_n\right] &= \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \ldots, \vec{u}_n\right] = \\ &= \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \ldots, \vec{u}_n\right] = V.\end{aligned}$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Opravdu lze při vhodném uspřádání vektorů vektor $\vec{u}_{k+1}$ nahradit vektorem $\vec{v}_{k+1}$. Tím jsme dokázali pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m+1)$, tzv. indukčního kroku důkazu matematickou indukcí. Tím je tento důkaz kompletní a můžeme proto říci, že Steinitzova věta o výměně je dokázána. □

4.5 Důsledky Steinitzovy věty o výměně

Věta 11. Každé dvě báze *konečně generovaného vektorového prostoru V* **mají týž počet prvků**.

Věta 12. *Každá* **skupina lineárně nezávislých vektorů** *libovolného vektorového prostoru* **generovaného** n**–prvkovou množinou** *obsahuje* **nejvýše** n **vektorů**.

Věta 13. *Je-li* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ **báze vektorového prostoru** V *a jsou-li vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ **lineárně nezávislé**, *je množina* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ **rovněž báze** *vektorového prostoru V.*

Věta 14. *Nechť* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *je* **množina generátorů** *vektorového prostoru V, pak*

$$\dim V \leq n.$$

4.6 Cvičení: Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru vzhledem k bázi

1. Rozhodněte, zda je daná množina vektorů M_i bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, určete souřadnice vektoru $\vec{a} = (1, -2, 5)$ vzhledem k této bázi. Pokud ne, uveďte, jaký vektorový „podprostor" daná množina generuje.

a) $M_1 = \{(-1, 0, 2), (3, 1, -1), (2, 1, 1)\}$,
b) $M_2 = \{(2, 1, 2), (1, 1, -1), (2, 1, 1)\}$,
c) $M_3 = \{(5, 0, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 2)\}$,
d) $M_4 = \{(2, -4, 6), (-1, 2, -3), (4, -8, 12)\}$,
e) $M_5 = \{(1, 2, 0, 1), (2, 0, 1, -3), (1, 1, 1, 1)\}$,
f) $M_6 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,
g) $M_7 = \{(1, 2), (-1, 5), (1, 1)\}$.

2. Jsou uvedené polynomy bází vektorového prostoru polynomů stupně nejvýše 2?

a) $1 - 3x + 2x^2,\ 1 + x + 4x^2,\ 1 - 7x$,

b) $4 + 6x + x^2,\ -1 + 4x + 2x^2,\ 5 + 2x - x^2$.

3. Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina $M = x + 1,\ x - 1,\ (x + 1)^2,\ (x + 1)^3$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$ vzhledem k této bázi.

4. Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina polynomů $M = \{x^3 + 2x^2 + 1, x^3 + x^2 + x, x^3 + 1, x^2 + 1\}$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ vzhledem k této bázi.

Příklady pro dobrovolné řešení

5. Vytvořte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1, 2, 0, 1, 2)$, $(2, 3, -1, 5, 4)$, $(-1, 0, -2, 0, 1)$. Potom určete souřadnice vektoru $(2, 1, 1, 0, 1)$ vzhledem k této, vámi vytvořené, bázi.

6. Najděte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1, 2, 0, 1, 2)$, $(2, 5, -1, 8, 4)$, $(-1, 0, -2, 3, -1)$.

7. Najděte bázi vektorového prostoru V, která obsahuje daný vektor $\vec{u}$:

a) $V = [(1, 2, 3, -1), (1, 0, 1, -2), (-2, 1, 4, 3)]$, $\vec{u} = (1, 1, 7, -3)$,

b) $V = [(2, 1, 0, 1), (-1, 1, 2, 3), (2, 3, 4, 0)]$, $\vec{u} = (4, 1, 0, -6)$.

8. Určete dimenzi vektorového prostoru
$V = [\{(1, 1, 0, 2, 3), (2, -1, 1, 2, 3), (-1, 0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, -1, 0)\}]$. Pokud to jde, vytvořte jeho bázi tak, aby obsahovala vektor $(-4, 1, 1, 0, 1)$.