5 Skalární součin

Skalární součin[1] je operace, která dvěma vektorům přiřazuje reálné číslo (obecně *skalár*, tj. prvek tělesa T). Protože do skalárního součinu vstupují dva prvky, konkrétně vektory, říkáme, že je to operace *binární* (když do operace vstupuje jeden prvek, nazývá se *unární*, když tři, tak *ternární* atd.). Symbolem operace *skalární součin* je tečka „·“ (v angličtině se mu proto říká také „dot product“). Skalární součin je významný tím, že se jedná o operaci, která nám otevírá cestu k měření, tj. k určování vzdáleností, odchylek, obsahů a objemů, v afinním bodovém prostoru. Říkáme, že umožňuje zavedení tzv. *metriky*. Bez skalárního součinu umíme vyšetřovat pouze vzájemné polohy bodových podprostorů. Pojem *skalární součin* se objevuje již ve středoškolském učivu matematiky. Konkrétně se jedná o tzv. *Eukleidovský skalární součin*, který je pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ z R^2 dán vztahem

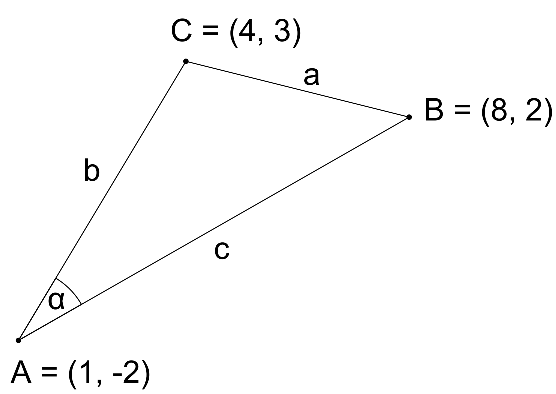
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2. \tag{28}$$

Pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ z R^3 pak analogicky

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{29}$$

Následující příklad přináší standardní problém ze středoškolské matematiky, k jehož řešení se skalární součin využívá.

PŘÍKLAD 5.1. *Je dán trojúhelník ΔABC, $A[1,-2]$, $B[8,2]$, $C[4,3]$. Vypočtěte velikost jeho vnitřního úhlu α, viz Obr. 14.*



Obrázek 14: Vypočtěte velikost vnitřního úhlu α trojúhelníku ABC

Řešení: Použijeme známý vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}, \tag{30}$$

[1]Pro doplňkové studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

v němž se skalární součin (29) objevuje ve dvou rolích. Jednak je zřetelně použit v čitateli, viz $\vec{u}\cdot\vec{v}$, jednak se poněkud skrytě uplatňuje při výpočtu norem (velikostí) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ve jmenovateli lomeného výrazu na pravé straně (30). Pro výpočet normy $|\vec{u}|$ vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ totiž platí

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \tag{31}$$

kde výraz pod odmocninou můžeme zapsat pomocí skalárního součinu (29) takto $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 = \vec{u}\cdot\vec{u}$. Potom (31) můžeme přepsat do tvaru

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}. \tag{32}$$

Vraťme se nyní k řešení příkladu 5.1. Pro využití vztahu (30) budeme uvažovat orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ jako umístění vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, v daném pořadí. Tj. $\vec{u} = B - A = (7,4)$ a $\vec{v} = C - A = (3,5)$. Pro normy těchto vektorů potom platí $|\vec{u}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$ a $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Po dosazení do (30) tak dostáváme

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{7\cdot 3 + 4\cdot 5}{\sqrt{65}\sqrt{34}} = \frac{41}{\sqrt{65}\sqrt{34}} = 0.872. \tag{33}$$

Úhel α, který splňuje rovnici (33), má při zaokrouhlení na tři desetinná místa velikost $0,511\,\mathrm{rad}$, tj. $\alpha = 29,29°$.

Původ skalárního součinu

Při pohledu na formuli (29) člověka přirozeně napadne otázka, jak se tento výpočet zrodil? Proč zrovna takhle? Možnou odpověď nám nabízí následující řešení problému nalezení vztahu pro výpočet velikosti vektoru $\vec{u} - \vec{v}$, viz Obr. 15. Již jsme si připomenuli, že velikost (též. normu; u geometrického vektoru se jedná o délku orientované úsečky, která je jeho umístěním) vektoru $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ značíme $|\vec{w}|$ a platí $|\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$. Potom pro vektor $\vec{u} - \vec{v}$ platí dle Obr. 15

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

(jedná se vlastně o opakované uplatnění Pythagorovy věty v trojrozměrném prostoru), odkud po umocnění obou stran na druhou dostaneme vztah

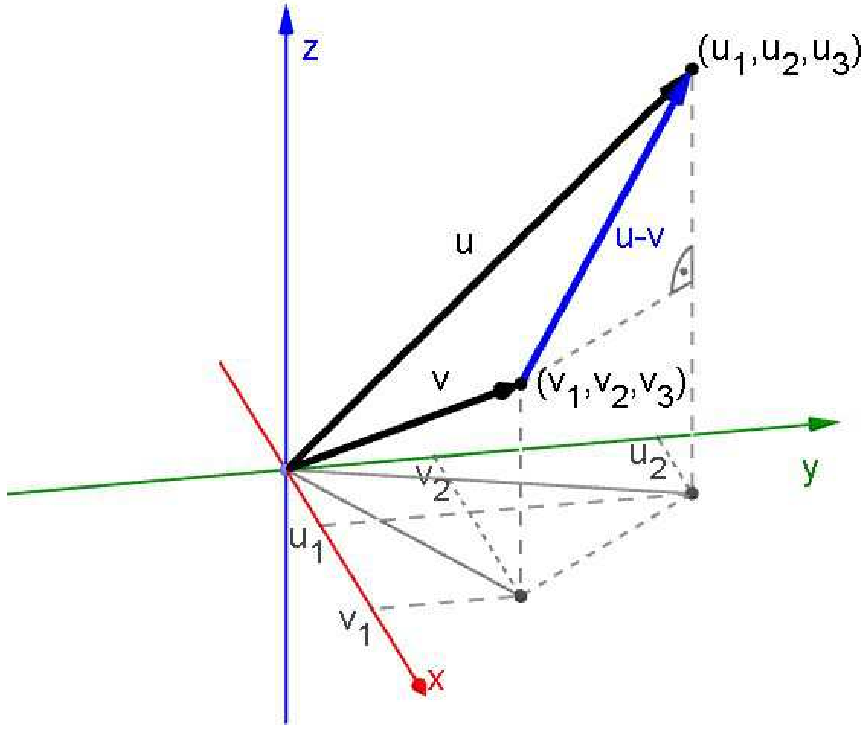
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2,$$

jehož pravou stranu upravíme na následující tvar

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

a pomocí vztahů pro velikosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ přepíšeme do podoby

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3). \tag{34}$$



Obrázek 15: Vztah pro velikost vektoru $\vec{u}-\vec{v}$ obsahuje formuli pro výpočet Eukleidovského skalárního součinu

Požadavek zápisu rovnosti (34) ve tvaru

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

nás potom vede k definování skalárního součinu $\vec{u}\cdot\vec{v}$ formulí (29). Aby vše „fungovalo“, musí mít tato operace určité vlastnosti. Ty jsou specifikovány v následující definici 13, která zavádí *skalární součin* jako obecnější operaci, než je výše uvedený *Eukleidovský skalární součin*. Ten se tak stává jenom jednou z mnoha operací vyhovujících této definici.

Definice 13 (**Skalární součin**). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u},\vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u}\cdot\vec{v} \in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, *(SYMETRIE)*
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$, *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$,
4. $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0 \ \wedge [\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. *(POZITIVITA)*

Poznámky.

1. Skalární součin je vždy definován na nějakém vektorovém prostoru V. Potom hovoříme o **vektorovém prostoru se skalárním součinem**, nebo stručněji o **unitárním prostoru**.

2. Nejčastěji se setkáme s některým z následujících tří způsobů zápisu skalárního součinu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{nebo} \quad < \vec{u}, \vec{v} > \quad \text{nebo} \quad [\vec{u}, \vec{v}].$$

5.1 Příklady skalárních součinů

Existují různé skalární součiny, výše uvedený Eukleidovský není jediný. Za skalární součin totiž považujeme každou operaci, která splňuje definici 13. Uveďme si zde několik příkladů:

1. Eukleidovský skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

2. Vážený skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_2.$$

Obecně zapíšeme vážený skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ formulí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i v_i,$$

kde c_i je **váha** součinu i–tých souřadnic těchto vektorů.

3. Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 4u_2 v_2.$$

4. Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$

$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

PŘÍKLAD 5.2. *Ověřte, že operace definovaná předpisem $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2$ pro $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ je skutečně skalárním součinem.*

Řešení: Zvolíme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$ a dosazením jejich souřadnic dle daného předpisu do obou stran příslušných rovností (v případě vlastnosti 4 nerovnosti) postupně ověříme platnost všech vlastností z definice 13.

5.2 Norma (velikost) vektoru

Zde shrneme a zobecníme to, co jsme o *normě* (*velikosti*) vektoru zjistili na str 59, viz formule (31), (32). Zobecnění spočívá v tom, že uvedenou definicí 14 je *norma* vektoru zavedena pro obecný skalární součin „·“, neřeší se jeho konkrétní podoba.

Definice 14 (Norma vektoru). *Normou (velikostí) vektoru $\vec{u} \in V_n$ rozumíme číslo*

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Je třeba mít na paměti, že definice 14 zavádí normu vektoru pomocí obecného pojmu *skalární součin*. Hodnota normy tedy závisí na tom, jaký konkrétní skalární součin použijeme, tj. podle jaké formule ho budeme počítat!

PŘÍKLAD 5.3. *Je dán vektor $\vec{a} = (2, -3, 5)$. Vypočítejte jeho normu pro*

a) Eukleidovský skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3$,

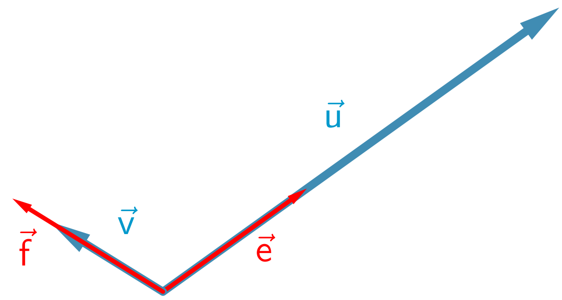
b) vážený skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2 - u_3v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

Poznámky.

1. Pro normu vektoru používáme též označení $\|\vec{u}\|$ (potřebujeme-li ji odlišit od absolutní hodnoty reálného čísla).
2. Vektor s normou $|\vec{u}| = 1$ nazýváme **jednotkový vektor**.
3. Součin $\vec{u} \cdot \vec{u}$ zkracujeme na $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. Potom je zřejmé, že platí
$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2. \tag{35}$$
4. Ke každému skalárnímu součinu přísluší dle definice 14 norma, ale **ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu**. Například:
   a) $\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|, \quad$ (tzv. 1-norma)
   b) $\|\vec{u}\|_{\text{inf}} = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|\}$,
   c) $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$, Eukleidovská norma (též 2-norma)

5.2.1 Normování vektoru

Jsou situace, kdy je výhodné nahradit daný vektor jednotkovým vektorem téhož směru. Hovoříme o tzv. *normování vektoru*. Často se s tím setkáváme v souvislosti s bázemi. Máme dánu bázi $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ vektorového prostoru V, jejíž vektory mají různé velikosti, a potřebujeme ji nahradit bází $G = \{\vec{e}, \vec{f}\}$, jejíž vektory $\vec{e}, \vec{f}$ mají



Obrázek 16: Vztah pro velikost vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ obsahuje formuli pro výpočet Eukleidovského skalárního součinu

v daném pořadí stejné směry jako vektory $\vec{u}, \vec{v}$, ale jsou jednotkové, tj. $|\vec{e}| = |\vec{f}| = 1$, viz Obr. 16. Normování vektoru $\vec{u}$ provedeme konkrétně tak, že ho vydělíme jeho velikostí (normou), výsledný jednotkový vektor rovnoběžný s $\vec{u}$, označme ho $\vec{e}$, je potom dán vztahem

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \tag{36}$$

PŘÍKLAD 5.4. *Normujte vektor* $\vec{a} = (3, -4, 0)$.

Řešení:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(3, -4, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right).$$

PŘÍKLAD 5.5. *Normujte vektor* $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)$

5.3 Důležité nerovnosti*

Studium této kapitoly je dobrovolné. Její obsah nebude vyžadován u zkoušky. To však neznamená, že není zajímavý a nestojí za nahlédnutí.

Při zkoumání vlastností vektorových prostorů se skalárním součinem nám výrazně pomohou následující dvě nerovnosti:

1) Cauchyova-Schwarzova nerovnost,
2) Trojúhelníková nerovnost.

Ukážeme si, že tyto nerovnosti platí v jakémkoliv vektorovém prostoru se skalárním součinem.

5.3.1 Cauchyova–Schwarzova nerovnost

Věta 15 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost). *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a pro jakýkoliv skalární součin platí*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|. \tag{37}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ lineárně závislé (tj. rovnoběžné).

Důkaz. Uvažujme vektor $\vec{u} + k\vec{v}$. Potom dle definice skalárního součinu a normy vektoru platí

$$\|\vec{u} + k\vec{v}\|^2 \ge 0,$$
$$\|\vec{u}\|^2 + 2k\vec{u} \cdot \vec{v} + k^2\|\vec{v}\|^2 \ge 0. \tag{38}$$

Když levou stranu nerovnosti (38) vhodně přeuspořádáme

$$\|\vec{v}\|^2 k^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}\, k + \|\vec{u}\|^2 \ge 0,$$

můžeme na ni nahlížet jako na kvadratický trojčlen $Ak^2 + Bk + C$ s proměnnou k. Potom je kvadratická nerovnost (38) vzhledem k této proměnné splněna právě tehdy, když je diskriminant $B^2 - 4AC$ tohoto trojčlenu menší nebo roven nule

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \le 0.$$

Odtud dostaneme po několika úpravách nerovnost (37), kterou chceme dokázat

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \le \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2,$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

□

Poznámka. Používáme různé zápisy Cauchyovy–Schwarzovy (dále jen „C–S“) nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2},$$

PŘÍKLAD 5.6. *Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, pro která platí:*

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Určete maximální možnou hodnotu e.

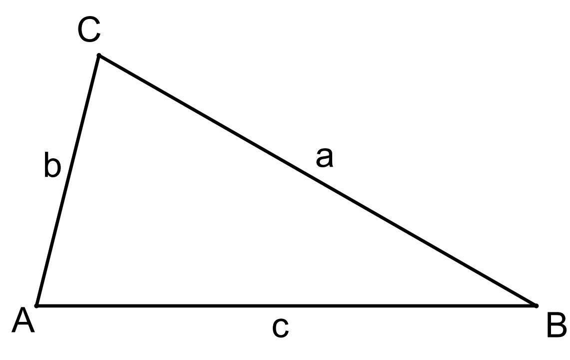
Nápověda: Dané rovnice upravte na tvary

$$a + b + c + d = 8 - e$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2.$$

a uvažujte C–S nerovnost pro vektory $\vec{u} = (a, b, c, d)$ a $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.

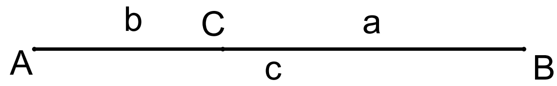
5.3.2 Trojúhelníková nerovnost

Mají-li tři úsečky a, b, c tvořit strany trojúhelníku ABC (viz Obr. 17), musí pro jejich délky platit, že součet každých dvou z nich je větší než ta třetí (tj. $a+b > c$, $a+c > b$, $b+c > a$). Nastane-li v některém z těchto případů rovnost, body A, B, C leží v přímce

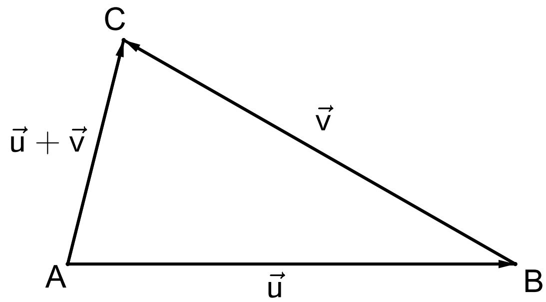


Obrázek 17: Úsečky délek a, b, c jsou stranami trojúhelníku

(trojúhelník degeneruje v úsečku, viz Obr. 18). Tyto skutečnosti jsou popsány tzv. *trojúhelníkovou nerovností.* Pokud do stran trojúhelníku ABC vhodně umístíme vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{u} + \vec{v}$, jak ilustruje Obr. 19, můžeme tuto nerovnost formulovat i pro vektory a jejich normy (viz Věta 16).



Obrázek 18: Pro $a + b = c$ leží vrcholy „trojúhelníku“ v přímce



Obrázek 19: Trojúhelníková nerovnost pro vektory

Věta 16 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu součinu platí*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \tag{39}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když existuje $k \in R, k \geq 0$ takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$ nebo $\vec{v} = k\vec{u}$.

Důkaz. Ukážeme, že platnost nerovnosti (39) je důsledkem platnosti C-S nerovnosti (37). Nejprve obě strany nerovnosti (39) umocníme na druhou

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2,$$

pravou stranu při tom vyjádříme ve tvaru příslušného trojčlenu

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

Potom u členů, které jsou druhými mocninami norem vektorů, užijeme vztah (35) a zapíšeme je ve tvaru skalární mocniny

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2.$$

Po úpravě levé strany

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2$$

a náležitém zjednodušení dostáváme nerovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|,$$

jejíž pravdivost vyplývá z pravdivosti C–S nerovnosti ($|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$) a z definice absolutní hodnoty ($\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$). $\square$

PŘÍKLAD 5.7. *Dokažte následující nerovnost:*

$$\big|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\big| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|; \quad \vec{a}, \vec{b} \in V_n.$$

Řešení: Postupujeme úplně stejně jako při výše uvedeném důkazu trojúhelníkové nerovnosti.

PŘÍKLAD 5.8. *Zapište skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pouze užitím normy vektoru.*

Řešení: Využijeme vztah (35), tj. toho, že platí: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. Nejprve uvažujeme vektor $\vec{u} - \vec{v}$. Dle (35) platí

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Odtud potom můžeme vyjádřit skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pomocí norem vektorů takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{40}$$

Další možností je uvažovat vztahy $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Odečteme-li první od druhého, dostaneme vztah $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$, ze kterého vyjádříme skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ takto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{41}$$

5.4 Odchylka vektorů

Vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů (30), který jsme použili při řešení příkladu 5.1 na str. 58, můžeme definovat jako důsledek Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (37). Z nerovnosti $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ vyplývá vztah $\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \le 1$, který můžeme přepsat do tvaru

$$\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right| \le 1.$$

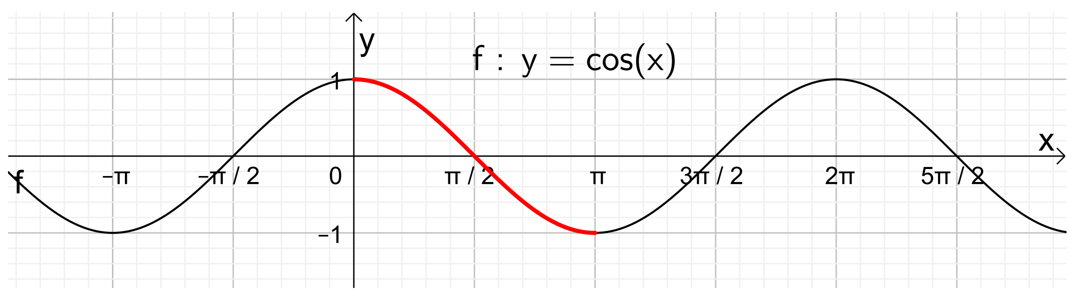
Uvážíme-li průběh hodnot funkce $\cos x$, viz graf na Obr. 20, pro které platí

$$|\cos x| \le 1,$$

je zřejmé, že pro každé dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}_n$ existuje jediné reálné číslo $\varphi \in \langle 0,\pi\rangle$, příslušné hodnoty $\cos\varphi$ viz červená část grafu na Obr. 20, takové, že

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Toto číslo nazveme *odchylkou* nenulových vektorů $\vec{u},\vec{v}$.



Obrázek 20: Graf funkce $f: y = \cos x$

Definice 15 (Odchylka vektorů). *Odchylkou dvou nenulových vektorů* $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}_n$ *rozumíme reálné číslo* $\varphi \in \langle 0,\pi\rangle$, *které je dáno vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \tag{42}$$

PŘÍKLAD 5.9. *Vypočítejte úhel mezi vektory* $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{w} = (0,1,1)$.

a) Uvažujte Eukleidovský skalární součin.

b) Uvažujte vážený skalární součin $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3$.

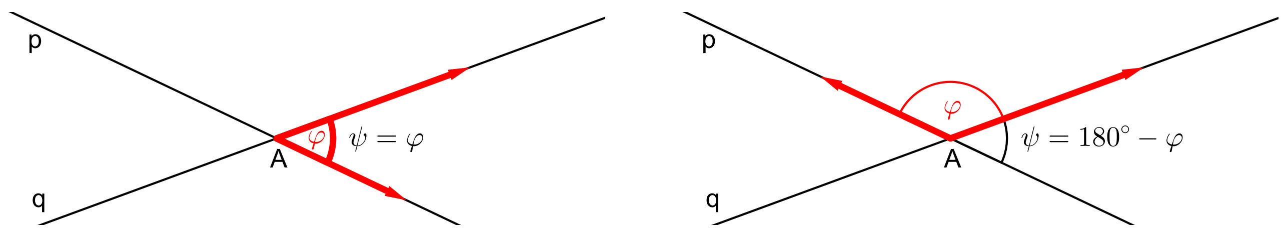
Zápis skalárního součinu pomocí norem vektorů

Důsledkem vztahu (42) je možnost zápisu skalárního součinu (nezapomínejme na to, že je to číslo) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pomocí jejich norem $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ a odchylky φ takto

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi. \tag{43}$$

5.4.1 Odchylka přímek

Víme, že u každé přímky lze vyjádřit její směr prostřednictvím*směrového vektoru* přímky. Nabízí se tak využití znalosti výpočtu odchylky dvou vektorů, viz definice 42, k určení odchylky přímek. Samozřejmě to jde, odchylku přímek skutečně můžeme spočítat pomocí odchylky jejich směrových vektorů. Musíme však při tom dát pozor na to, že ne vždy se tyto dvě odchylky rovnají. K jejich rozdílnosti může dojít v důsledku toho, že tyto dva druhy odchylky jsou definovány různým rozmezím úhlů. Zatímco odchylka dvou vektorů může být úhlem ostrým i tupým, odchylka dvou přímek je definována menším z úhlů, které přímky v rovině vytvářejí, tj. je vždy úhlem ostrým, maximálně pravým. Viz Obr. 21, kde jsou zobrazeny obě možné situace, vlevo je případ, kdy se odchylka vektorů shoduje s odchylkou přímek, vpravo pak případ, kdy se tyto úhly liší, ovšem tak, že dohromady tvoří úhel přímý. Jak



Obrázek 21: Odchylka přímek ψ vs. odchylka směrových vektorů φ

tedy budeme při výpočtu odchylky přímek postupovat? Nabízejí se následující dvě cesty:

(i) Spočítáme odchylku směrových vektorů přímek. Pokud je menší nebo rovna 90°, tj. $\cos\varphi \leq 0$, je rovna odchylce přímek. Pokud vyjde odchylka směrových vektorů větší než 90°, tj. $\cos\varphi \geq 0$, odchylka přímek bude jejím doplňkem do 180°.

(ii) Modifikací vztahu (42) vytvoříme speciální vztah pro výpočet odchylky dvou přímek ψ. Z grafu funkce kosinus na Obr. 20 je zřejmé, že hodnoty $\cos\varphi$ a $\cos(\pi - \varphi)$ se liší pouze znaménkem, jejich absolutní hodnoty se rovnají, přitom pro ostrý úhel φ je $\cos\varphi \geq 0$. Pro výpočet odchylky dvou přímek pomocí jejich směrových vektorů, bez ohledu na jejich orientaci, se tak nabízí jednoduchá modifikace vztahu (42). Stačí, přidat závorky pro absolutní hodnotu. Odchylka ψ dvou přímek p, q se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ je tak dána vztahem

$$\cos\psi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \tag{44}$$

PŘÍKLAD 5.10. *Určete odchylku přímek p, q, pro které platí $p: x = 1 + 3t, y = 1 + t, z = 1 + 2t;\ t \in R$, $q: x = 2s, y = 3 + 9s, z = -1 + 6s;\ s \in R$.*

Řešení: Přímky jsou dány *parametricky*, tj. tak, že souřadnice libovolného bodu $X[x,y]$ přímky p jsou vyjádřeny pomocí jednoho jejího známého bodu $A[a_1,a_2]$ a jejího směrového vektoru $\vec{u} = (u_1,u_2)$ rovnicí ve tvaru

$$X = A + t\vec{u};\ t \in R, \tag{45}$$

po dosazení souřadnic

$$[x, y] = [a_1, a_2] + t(u_1, u_2);\ t \in R, \tag{46}$$

a rozepsání pro každou zvlášť dostáváme *parametrické rovnice přímky p*

$$x = a_1 + tu_1, \tag{47}$$

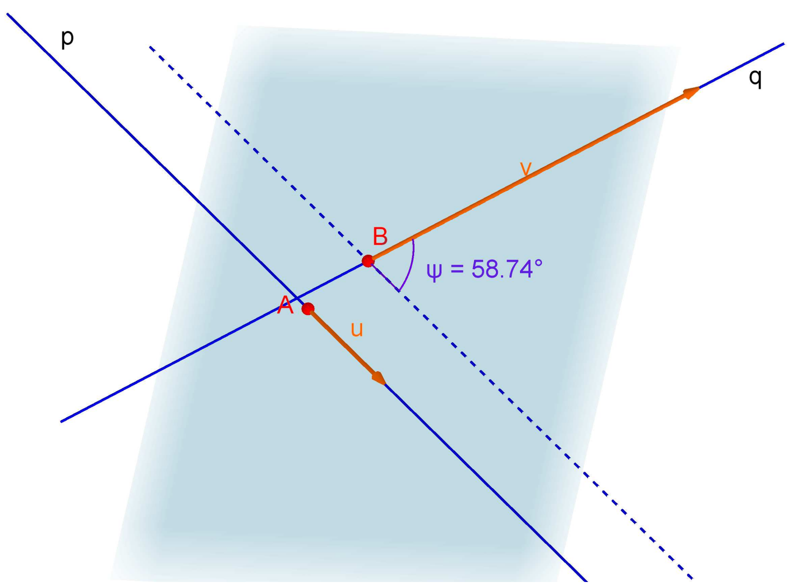
$$y = a_2 + tu_2;\ t \in R. \tag{48}$$

Porovnáním těchto rovnic se zadáním příkladu 5.10 tak získáme souřadnice směrových vektorů daných přímek, pro p je to $\vec{u} = (3, 1, 2)$, pro q potom $\vec{v} = (0, 9, 6)$.

Je otázka, zda k výpočtu odchylky těchto dvou přímek můžeme použít vztah (44), když jsme ho ilustrovali příkladem v rovině a teď se pohybujeme v trojrozměrném prostoru. V dimenzi prostoru problém není, vztah (44) je univerzální. Musíme si akorát ujasnit, jaké vzájemné polohy dvou přímek mohou v prostoru dané dimenze, zde konkrétně dimenze 3, nastat a jak v každé z nich odchylku těchto přímek určujeme.

V případě *různoběžných* přímek, které mají společný bod, je to jasné. Takové přímky leží ve společné rovině, odchylku tak určujeme stejně, jako je naznačeno na Obr. 21.

A jak to bude v případě *mimoběžných* přímek? Ten jednoduše převedeme na předchozí případ různoběžek. Přímky zadané v příkladu 5.10 shodou okolností mimoběžné jsou. Jejich konkrétní situaci můžeme sledovat v tomto GeoGebra appletu: https://www.geogebra.org/m/gqnf6tsf. Viz též Obr. 22. Postupujeme tak, že přím-



Obrázek 22: Odchylka dvou mimoběžných přímek

kou q proložíme rovinu, říkejme jí ρ, která je rovnoběžná s přímkou p, do ní potom přímku p posuneme, třeba tak, aby její obraz procházel bodem B. Tento průmět přímky p do roviny ρ je s přímkou p rovnoběžný a s přímkou q různoběžný, jeho odchylka s přímkou q je tak stejná, jako odchylka původních přímek. I v případě mimoběžných přímek lze proto použít vztah (44). Dosazením do něj dostáváme

$$\cos\psi = \frac{|21|}{\sqrt{14}\sqrt{117}} = \frac{|21|}{3\sqrt{14}\sqrt{13}}.$$

Vidíme, že skalární součin směrových vektorů přímek je kladný, absolutní hodnota v tomto konkrétním případě žádnou změnu znaménka nezpůsobí. Tento případ odpovídá situaci na Obr. 21 vlevo, odchylka přímek je totožná s odchylkou směrových přímek. Velikost úhlu dopočítáme třeba v programu wxMaxima[4]:

```
(% i1)  uhel_rad:float(acos(21/(3*sqrt(14)*sqrt(13))));
                         1.025262482235325                 (uhel_ rad)

(% i2)  float(uhel_rad*180/%pi);
                         58.74321312519065                 (% o2)
```

Odchylka přímek p, q je $58,74°$.

PŘÍKLAD 5.11. *Určete odchylku přímek k, l, pro které platí $k : x = 2 - t, y = -3 + 3t, z = 1 + t; t \in R$, $l : x = 1 + 3s, y = -2s, z = 5; s \in R$.*

Řešení: Řešte analogicky s příkladem 5.10. Pro informaci o výsledku a pro zájemce o použití matematického software zde uvádím řešení ve wxMaximě:

```
(% i2)  u:[-1,3,1]$ v:[3,-2,0]$
(% i3)  %psi:acos((u.v)/(sqrt(u.u)*sqrt(v.v))), float;
                         2.422825092052891                 (% o3)

(% i4)  float(%psi*180/%pi);
                         138.8176522730258                 (% o4)
```

Odchylka přímek k, l je $138,82°$.

Více o vzájemných odchylkách bodových podprostorů, tj. přímek a rovin, viz kapitola 18 na str. 166.

[4]Více o práci s programem wxMaxima viz http://home.pf.jcu.cz/ hasek/VTM1/wxMaxima ve vyuce.pdf

5.4.2 Kolmost vektorů

Souvislost mezi skalárním součinem $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a úhlem φ, přesněji jeho kosinem $\cos\varphi$, ustavená vztahem (42), nám poskytuje důležitý nástroj pro identifikaci vzájemně kolmých vektorů. Graf na Obr. 20 nám připomíná, že pro 90°, tj. $\frac{\pi}{2}$ rad, je hodnota kosinu rovna 0. Dle (42) je pak pro kolmé (nenulové) vektory roven nule i jejich skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Platí tedy, že dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\cos\varphi = 0$, tj.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0. \tag{49}$$

Tuto skutečnost využijeme zanedlouho, konkrétně v kapitole 5.5 na str. 78, k zavedení obecnějšího pojmu *ortogonální* vektory.

PŘÍKLAD 5.12. *Určete hodnotu parametru $c \in R$ tak, aby vektory $\vec{a} = (-2,3,c), \vec{b} = (5,c,-8)$ byly na sebe kolmé.*

5.4.3 Kolmý průmět vektoru do směru jiného vektoru

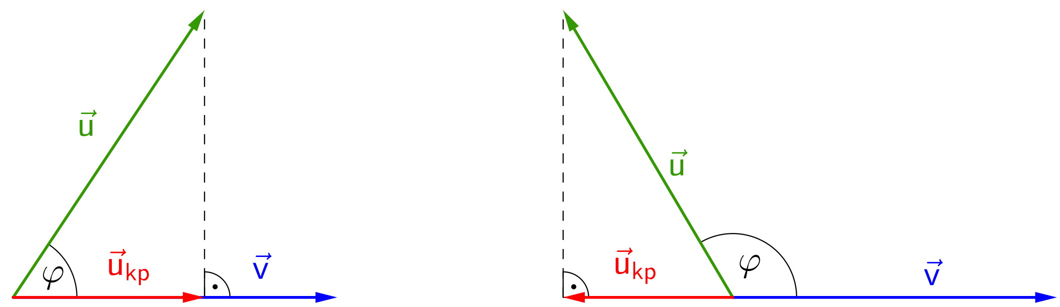
Ze středoškolské fyziky známe příklad na výpočet mechanické práce konané táhnutím břemene po vodorovné rovině při působení silou, která není rovnoběžná se směrem pohybu, viz Obr. 23, vlevo, kde je pohyb břemene působením síly $\vec{F}$ znázorněn vektorem posunutí $\vec{s}$. Mechanická práce W je v takovém případě konána pouze

Obrázek 23: $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$

složkou síly $\vec{F}_1$, která je rovnoběžná s vektorem posunutí $\vec{s}$, viz Obr. 23, vpravo. Složka $\vec{F}_2$, kolmá na směr pohybu, nemá pohybový účinek (samozřejmě, nepočítáme s tím, že by se nám působením této složky břemeno při posouvání nadzvedávalo, což se v praxi běžně děje), proto mechanickou práci nekoná.

Velikost práce W konané složkou $\vec{F}_1$ je rovna součinu velikosti této složky $|\vec{F}_1|$ a velikosti $|\vec{s}|$ vektoru posunutí $\vec{s}$, tj. $W = |\vec{F}_1||\vec{s}|$. Z Obr. 23, vpravo, je zřejmé, že velikost $|\vec{F}_1| = |\vec{F}|\cos\varphi$ je rovna *velikosti kolmého průmětu* vektoru $\vec{F}$ do směru vektoru $\vec{s}$, samotný vektor $\vec{F}_1$ potom můžeme nazvat *kolmým průmětem vektoru $\vec{F}$ do směru vektoru $\vec{s}$*. Určení *kolmého průmětu jednoho vektoru do směru druhého* i výpočet *velikosti tohoto průmětu* má široké uplatnění nejenom ve fyzice, ale i v geometrii, viz např. tzv. *Gramm–Schmidtův proces* vytvoření ortonormální báze představený v kapitole 6.2. Proto nyní, inspirováni uvedeným příkladem z fyziky, tyto postupy zobecníme. Použijeme při tom *skalární součin* a operaci *normování vektoru*, tj. nalezení jednotkového vektoru daného směru, viz (36) na str. 63.

Nejprve odvodíme postup výpočtu **velikosti kolmého průmětu** vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{v}$. Na Obr. 24 se jedná o velikost $|\vec{u}_{kp}|$ vektoru $\vec{u}_{kp}$. Vidíme, že podle velikosti φ je orientace $\vec{u}_{kp}$ buď souhlasná s $\vec{v}$, pro $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, nebo opačná, pro $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.



Obrázek 24: Kolmý průmět $\vec{u}_{kp}$ vektoru $\vec{u}$ do směru $\vec{v}$, vlevo pro $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, vpravo pro $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

Pro odvození vztahu pro $|\vec{u}_{kp}|$ se dočasně omezíme na situaci na Obr. 24 vlevo, kdy $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Potom platí

$$|\vec{u}_{kp}| = |\vec{u}| \cos \varphi. \tag{50}$$

Porovnáme-li (50) s (43), tj. s vyjádřením skalárního součinu vektorů pomocí jejich norem a odchylky, které je představeno na str. 68, můžeme psát

$$|\vec{u}_{kp}| = |\vec{u}| \cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{51}$$

Obecně může být hodnota výrazu $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ jak kladná, tak i záporná, podle toho zda je úhel φ mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ostrý nebo tupý. Pro velikost $\vec{u}_{kp}$ tak platí buď $|\vec{u}_{kp}| = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$, pro $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, nebo $|\vec{u}_{kp}| = -\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$, pro $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$. Stručně můžeme zapsat vztah pro výpočet velikosti kolmého průmětu $\vec{u}_{kp}$ vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{v}$ takto

$$|\vec{u}_{kp}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}. \tag{52}$$

Nyní je naším cílem vyjádřit **kolmý průmět vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{v}$ jako vektor**. Již známe $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \in R$, číslo, jehož absolutní hodnota je rovna velikosti vektoru $\vec{u}_{kp}$ a jehož znaménko odpovídá orientaci $\vec{u}_{kp}$ vzhledem k $\vec{v}$. Cesta k vektoru $\vec{u}_{kp}$ je zřejmá. Protože u vektoru $\vec{v}$ nás zajímá jenom směr, provedeme jeho znormování, tj. nahradíme ho vektorem téhož směru, ale velikosti 1, viz (36). Když tento jednotkový vektor vynásobíme číslem $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$, dostaneme, co hledáme, kolmý průmět $\vec{u}$ do směru $\vec{v}$ jako vektor

$$\vec{u}_{kp} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \tag{53}$$

Výsledný výraz v (53) vpravo je možné ještě dále upravit uplatněním vztahu $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$, viz (35) na str. 62, abychom dostali finální vztah pro kolmý průmět jako vektor

$$\vec{u}_{kp} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v}. \tag{54}$$

Možná někoho napadá myšlenka, že výraz na pravé straně (54) lze ještě zjednodušit. Pozor, není tomu tak! Tento výraz totiž obsahuje dvě operace, které nelze zaměnit, skalární součin a násobení vektoru reálným číslem. Skalární součin je použit ve výrazech $\vec{u} \cdot \vec{v}$ a $\vec{v}^2$, které jsou proto reálnými čísly. Násobení reálným číslem je potom aplikováno při vynásobení vektoru $\vec{v}$ číslem $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2}$. Výskyty symbolu $\vec{v}$ v (54) proto nelze nijak krátit!

PŘÍKLAD 5.13. *Určete kolmý průmět vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}$:*

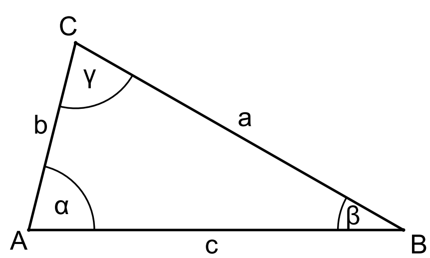
a) $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (1, 1)$,
b) $\vec{a} = (3, -4)$, $\vec{b} = (4, 3)$,
c) $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$,
d) $\vec{a} = (7, 5, -2)$, $\vec{b} = (1, 0, 0)$.

5.4.4 Kosinová věta

Získané poznatky o skalárním součinu vektorů a o výpočtu normy vektoru nyní využijeme k důkazu kosinové věty[5].

Věta 17 (Kosinová věta). *Pro libovolný trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ, v daném pořadí protilehlými jeho stranám délek a, b, c (viz Obr. 25), platí*

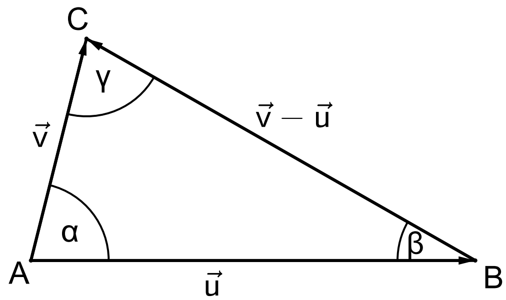
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{55}$$



Obrázek 25: Trojúhelník ABC

[5]Vedle kosinové věty je známa i věta sinová, která říká, že pro libovolný trojúhelník ΔABC s vnitřními úhly α, β, γ a jim protilehlými stranami a, b, c, v daném pořadí, platí: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Důkaz. Uvažujme vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$, jejichž umístěními jsou strany AB a AC trojúhelníku ABC. Strana BC je potom umístěním vektoru $\vec{v} - \vec{u}$ (viz Obr. 26)



Obrázek 26: Užití vektorů k důkazu kosinové věty

a pro normy uvedených vektorů platí $|\vec{u}| = c, |\vec{v}| = b, |\vec{v} - \vec{u}| = a$. Při využití zkušeností z důkazu věty 16 a řešení příkladu 5.8 můžeme psát

$$a^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = (\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u}^2 = |\vec{v}|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2 = b^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + c^2.$$

Nyní stačí za skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{u}$ dosadit podle vztahu (42) pro výpočet odchylky dvou vektorů a dostaneme vztah

$$a^2 = b^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}| \cos \alpha + c^2, \tag{56}$$

který je po dosazení dle rovností $|\vec{v}| = b$ a $|\vec{u}| = c$ již shodný s rovností $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Zbývající rovnosti dokážeme analogicky. □

PŘÍKLAD 5.14. *Ježíšova socha v Bilbau na náměstí Jesusen Bihotza Plaza, viz Obr. 27, je i s podstavcem vysoká* $40\,m$*, přitom samotná socha má výšku* $10\,m$*. Z jaké vzdálenosti sochu (tj. postavu Ježíše, bez podstavce) pozorujete, pokud ji vidíte pod zorným úhlem* $15°$ *(Uvažujte, že terén kolem sochy je vodorovný).*

Obrázek 27: Monumento al Sagrado Corazón de Jesús Bilbao

5.4.5 Pythagorova věta

Jako speciální případ kosinové věty, pro pravoúhlý trojúhelník, můžeme chápat známou Pythagorovu větu.

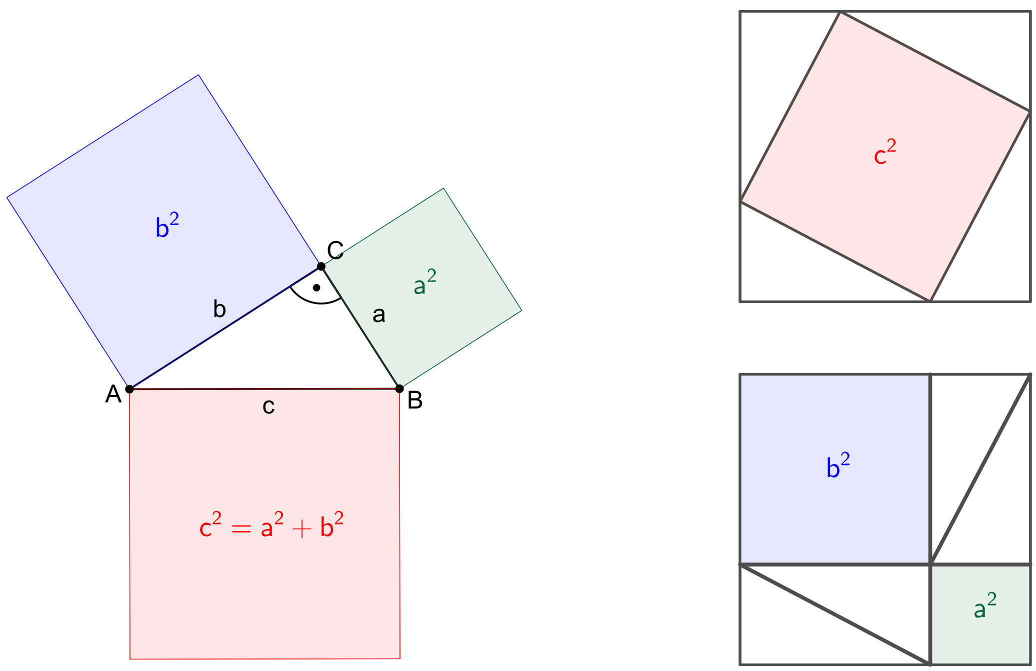
Věta 18 (Pythagorova věta). *V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami. (Pythagoras ze Samu, 570?–510 př. n. l.)*

Důkaz. Uvažujme, že trojúhelník ABC z Obr. 26 má při vrcholu A pravý úhel (tj. $\alpha = 90°$ a $\cos\alpha = 0$). Potom dle (56) platí

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

kde a je přepona a b, c jsou odvěsny tohoto pravoúhlého trojúhelníku. □

Důkazů Pythagorovy věty existuje mnoho, viz https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/. Samostatnou kapitolu mezi nimi tvoří důkazy obrázkem, tzv. *důkazy beze slov*. Jeden takový důkaz Pythagorovy věty je uveden na Obr. 28 a váže se k němu následující příklad.



Obrázek 28: Pythagorova věta (vlevo) a její „důkaz beze slov“ (vpravo)

PŘÍKLAD 5.15. *Vysvětlete podstatu důkazu Pythagorovy věty beze slov na Obr. 28. Potom najděte na internetu nebo v literatuře jiný důkaz Pythagorovy věty, opět grafický, beze slov. Tento důkaz představte a vysvětlete.*

Cvičení: Skalární součin

1. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li: $A = [1, 2]$, $B = [3, 5]$, $C = [1 + 3\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}]$.

2. K vektorům $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ a $\vec{c} = (3, 2, -4)$ určete vektor $\vec{x}$ tak, aby platilo $\vec{a} \cdot \vec{x} = -5$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -11$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 20$.

3. Vypočtěte úhel mezi úsečkami AB a AC; $A = [1, 2, 3]$, $B = [-1, 0, 1]$, $C = [1, -2, 5]$.

4. Znormujte vektor $\vec{v} = (-4, -3)$.

5. Jsou dány vektory $\vec{v} = (1, -1)$, $\vec{w} = (3, 2)$. Najděte kolmý průmět $\vec{u}$ vektoru $\vec{w}$ do směru $\vec{v}$.

4. Kvádr $ABCDEFGH$ má délky hran $|AB| = 4$, $|BC| = 3$ a $|AE| = 5$. Vypočtěte úhel stěnové úhlopříčky DE a tělesové úhlopříčky DF.

Příklady pro dobrovolné řešení

7. Ze čtverce o straně a je sestrojen plášť pravidelného trojbokého hranolu. Vypočtěte úhel φ sousedních stran lomené čáry, kterou na plášti hranolu vytváří úhlopříčka daného čtverce.

8. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku KLM; $K = [5\sqrt{3}, 5]$, $L = [-\sqrt{3}, -1]$, $M = [0, 0]$.

9. K jednotkovému vektoru $\vec{a} = \left(\frac{-1}{2}, a_2\right)$, $a_2 > 0$ najděte jednotkový vektor $\vec{b}$ s ním ortogonální.

10. Který z následujících výrazů definuje skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{w}$ vektorů $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$:

a) $2v_1w_1 + 3v_2w_2$, **b)** $v_1w_2 + v_2w_1$, **c)** $v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2$,
d) $2v_1w_1 + (v_1 - v_2)(w_1 - w_2)$.