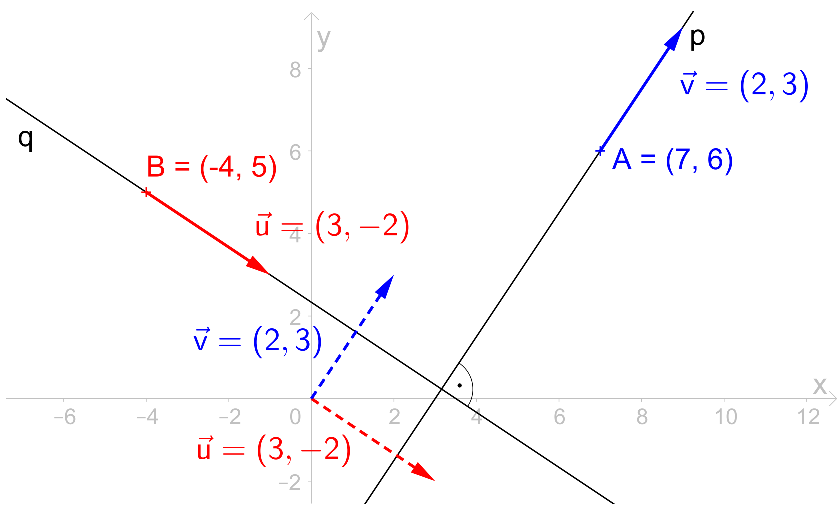
5.5 Ortogonální a ortonormální vektory

V kapitole 5.4.2 na str. 72 jsme se zabývali otázkou kolmosti dvou nenulových vektorů. Ukázali jsme si, jak ze vztahu (42) pro výpočet odchylky dvou vektorů vyplývá, že nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Tato skutečnost nám nyní poslouží k zavedení pojmu *ortogonálních vektorů* a využijeme ji při popisu vektorových a bodových (pod)prostorů i při zkoumání jejich vlastností a vzájemných poloh.

PŘÍKLAD 5.16. *Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $A = [7, 6]$ kolmo na přímku $q: \ x = -4 + 3t, y = 5 - 2t; \ t \in R$.*

Řešení: Z parametrických rovnic přímky q vyplývá, že tato přímka je určena bodem $B = [-4, 5]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (3, -2)$ (viz Obr. 29). Má-li být přímka p



Obrázek 29: Přímka p jdoucí bodem A kolmo k přímce q

kolmá k přímce q, je zřejmé, že každý její směrový vektor $\vec{v}$ je kolmý k vektoru $\vec{u}$. K řešení úlohy proto postačuje najít jeden nenulový vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, který splňuje rovnost $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Jeho souřadnice jsou tedy řešením rovnice

$$3v_1 - 2v_2 = 0.$$

Z nekonečně mnoha takových řešení vybereme jedno konkrétní, nabízí se např. $(v_1, v_2) = (2, 3)$. Hledaná přímka p má potom parametrické rovnice $p: \ x = 7 + 2t, y = 6 + 3t; \ t \in R$.

PŘÍKLAD 5.17. *Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $P[-3, 2]$ kolmo na přímku $\overleftrightarrow{AB}$; $A[-1, -2]$, $B[2, 3]$.*

Ortogonální a ortonormální vektory

Pojem *kolmé vektory* má v geometrických vektorových prostorech postižitelných naší zkušeností a představivostí, tj. v prostorech dimenze 2 a 3, jasnou vizuální interpretaci prostřednictvím kolmosti orientovaných úseček, které jsou jejich umístěními.

Pojem *ortogonální vektory* je jeho zobecněním, jak z pohledu dimenze příslušného vektorového prostoru, tak i z pohledu počtu zúčastněných vektorů a jejich velikostí. Pojmem *ortonormální vektory* pak označujeme vektory ortogonální, které jsou navíc jednotkové. Vše je uvedeno v následujících definicích 16 a 17. Nejprve pojmy definujeme pro dvojice vektorů, potom pro skupiny více vektorů.

Definice 16 (Dvojice ortogonálních a ortonormálních vektorů). *Dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{57}$$

Jsou-li navíc jednotkové, tj. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$, nazýváme je ortonormální.

Poznámka. Uvažujeme-li Eukleidovský skalární součin, je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jednotkový právě tehdy, když je splněna podmínka

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1,$$

kterou lze po umocnění obou stran na druhou vyjádřit ve tvaru

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

O vektorech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tak můžeme říci, že jsou *ortonormální* právě tehdy, když současně platí

$$\begin{aligned} u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1, \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jako ortogonální či ortonormální můžeme označit i větší skupinu vektorů, jak uvádí následující definice.

Definice 17 (Ortogonální a ortonormální vektory). *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0,$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, k$; $i \neq j$. Jsou-li navíc všechny vektory jednotkové, tj.

$$|\vec{u}_i| = 1,$$

pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$, nazýváme je ortonormální.

Poznámky.

1. Ortogonální vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme takto

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Ortogonalita je zobecněním kolmosti. Protože kromě termínu „ortogonální vektory“ používáme též označení „kolmé vektory“, je dobré mít na paměti, že definice ortogonálních vektorů připouští i nulový vektor a vyplývá z ní, že nulový vektor je ortogonální ke všem vektorům. Hovoříme-li o kolmých vektorech, uvažujeme vesměs vektory nenulové.

3. Pojmem *ortogonální vektory* označujeme skupinu dvou, ale i více vektorů, které splňují definici 17. Tj. skupinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ nazveme ortogonální, když pro každé dva *různé* vektory z nich platí $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$.

4. *Ortonormální* jsou vektory, které jsou *ortogonální* a navíc všechny *jednotkové*, tj. platí:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_i^j$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

6 Ortonormální báze

Bází vektorového (pod)prostoru je jakákoliv množina jeho generátorů, která je lineárně nezávislá, viz definice 9 na str. 44. Výlučné postavení mezi všemi bázemi mají díky svým vlastnostem tzv. *ortonormální báze*, tj. báze, jejichž vektory jsou *ortonormální* (viz def. 17).

Definice 18 (Ortogonální a ortonormální báze). *Bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ vektorového prostoru V se skalárním součinem nazveme ortogonální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortogonální. Bázi B nazveme ortonormální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortonormální.*

Poznámka. Báze B je tedy ortonormální, jestliže

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_i^j$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

PŘÍKLAD 6.1. *Rozhodněte, zda se jedná o ortogonální či ortonormální báze:*

a) $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$,

b) $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

c) $B_3 = \{(2,0,0),(0,-1,0),(0,0,4)\}$.

Ortogonálnost vektorů zaručuje jejich nezávislost, jak ukazuje následující věta.

Věta 19. *Jsou-li nenulové vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, $n \in N$, ortogonální, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že nenulové ortogonální vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé. Aspoň jeden koeficient k_i lineární kombinace

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \dots k_n\vec{u}_n = \vec{o} \tag{58}$$

tak musí být různý od nuly. Nechť je to třeba k_1. Pokud nyní skalárně vynásobíme obě strany rovnosti (58) vektorem $\vec{u}_1$, dostaneme rovnost

$$k_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \dots k_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 = \vec{o} \cdot \vec{u}_1, \tag{59}$$

na jejíž levé straně jsou všechny členy kromě prvního díky předpokládané ortogonalitě vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ rovny nule. Rovnost (59) se tak redukuje na tvar

$$k_1\vec{u}_1^2 = 0, \tag{60}$$

kde $\vec{u}_1^2 \neq 0$ (vektory $\vec{u}_i$ jsou dle předokladu nenulové). Potom ale musí být $k_1 = 0$, což je ale ve sporu s předpokladem, že $k_1 \neq 0$. Tím je pravdivost věty dokázána. □

6.1 Výhody ortonormální báze

Uvedeme si dvě výhody, které nám oproti „obyčejné“ bázi přinese použití ortonormální báze.

6.1.1 Výpočet skalárního součinu

Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ určeny souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, je jakýkoliv skalární součin těchto vektorů dán vztahem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n,$$

bez ohledu na jeho konkrétní definici.

Tuto užitečnou skutečnost snadno dokážeme. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů báze B

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \dots + u_n\vec{b}_n, \quad \vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n$$

a skalárně je spolu vynásobíme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n) \cdot (v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n). \tag{61}$$

Pravou stranu (61) roznásobíme užitím vlastností 2 a 3 z definice skalárního součinu (viz def. 13). Dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1\vec{b}_1^2 + u_1v_2\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + u_1v_n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + \\ + u_2v_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + u_2v_2\vec{b}_2^2 + \cdots + u_2v_n\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \\ + \cdots + \\ + u_nv_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + u_nv_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \cdots + u_nv_n\vec{b}_n^2, \end{aligned} \tag{62}$$

kde ovšem, díky ortonormálnosti báze B, pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ pokud $i \neq j$, jinak $\vec{b}_i^2 = 1$. Rovnost (62) je tak pro každou ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ ekvivalentní rovnosti

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n, \tag{63}$$

bez ohledu na to, jak je definován skalární součin „·“.

Poznali jsme, že pokud používáme ortonormální bázi (a my tak činíme, protože není-li řečeno jinak, pracujeme se souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi), nemusíme se starat o definici skalárního součinu a počítáme ho tak, jak jsme zvyklí ze střední školy.

PŘÍKLAD 6.2. *Proveďte výpočet (61) a úpravu naznačenou v (62) pro ortonormální bázi $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Nedosazujte konkrétní hodnoty, pracujte v „symbolickém“ režimu.*

6.1.2 Určení souřadnic vektoru vzhledem k ortonormální bázi

Uvažujme vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, jehož souřadnice $u_1, u_2, ..., u_n$ jsou dány vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, tj.

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \ldots + u_n\vec{b}_n. \tag{64}$$

Potom pro i–tou souřadnici u_i vektoru $\vec{u}$ platí

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i, \tag{65}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah (65) nám umožňuje rychlý výpočet jednotlivých souřadnic vektoru. Podstatu jeho důkazu si ukážeme na případu $i = 1$, zobecnění pro $i = 1, 2, \ldots, n$ bude zřejmé. Jestliže vynásobíme obě strany (64) vektorem $\vec{b}_1$, dostaneme rovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = u_1\vec{b}_1^2 + u_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + \ldots + u_n\vec{b}_n \cdot \vec{b}_1, \tag{66}$$

která je díky ortonormálnosti vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ ekvivalentní s rovností

$$u_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_1.$$

Pro zobecnění stačí zaměnit 1 za i a uvažovat $i = 1, 2, \ldots, n$.

PŘÍKLAD 6.3. *Určete souřadnice vektoru* $\vec{v} = (1,1,1)$ *vzhledem k ortonormální bázi* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\vec{u}_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$,

Řešení: Označme v_i^B i–tou souřadnici vektoru $\vec{v}$ vzhledem k B. Potom $v_1^B = (1,1,1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $v_2^B = (1,1,1) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $v_3^B = (1,1,1) \cdot (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}) = \frac{4}{\sqrt{30}}$.

6.2 Gram–Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 8 nám zaručuje, že každý konečně generovaný vektorový prostor má alespoň jednu konečnou bázi. Poté, co jsme se seznámili s výhodami ortonormální báze, je zřejmé, že bychom uvítali stejnou záruku i pro existenci ortonormální báze. A skutečně, taková záruka existuje, pro vektorové prostory se skalárním součinem nám ji dává následující věta.

Věta 20 (Existence ortonormální báze). *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor se skalárním součinem má aspoň jednu ortonormální bázi.*

Důkaz. Existence konečné báze je zaručena větou 8. K důkazu věty 20 tak postačí ukázat, že z každé konečné báze uvažovaného vektorového (pod)prostoru můžeme vytvořit bázi ortonormální. To skutečně možné je. Garantuje nám to postup známý jako *Gram–Schmidtův ortogonalizační proces*. Místo důkazu věty 20 si podrobně rozebereme tento postup pro případ vektorových prostorů dimenze dva a tři. Zobecnění postupu pro případ vektorového prostoru dimenze n, které je podstatou důkazu věty, je potom zřejmé. □

Gram–Schmidtův ortogonalizační proces se týká vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru, využíváme ho však především k určování ortonormálních bází vektorových podprostorů. V případě vektorových prostorů můžeme vždy „sáhnout“ po kanonické bázi (tj. například pro R^2 je to $\{(1,0),(0,1)\}$).

6.2.1 Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 2

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (36) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{a}_1$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1. \tag{67}$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{a}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + k\vec{b}_1 \tag{68}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + k\vec{b}_1^2 = 0. \tag{69}$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

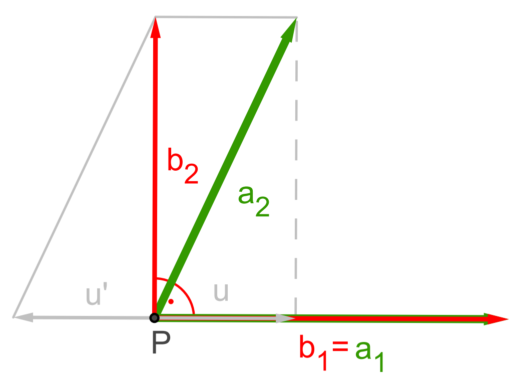
$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}, \tag{70}$$

kterou dosadíme do vztahu (68) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{71}$$

Rovnostmi (67) a (71) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{72}$$



Obrázek 30: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 2 - vytvoření ortogonální báze

Poznámka. Vztah (70) pro výpočet vektoru $\vec{b}_2$ kolmého k vektoru $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ můžeme odvodit „ryze geometricky“, bez nutnosti řešit rovnici (69) pro neznámou k. Použijeme k tomu obrázek 30 (nebo příslušný aplet vytvořený v GeoGebře) a poznatky o kolmém průmětu jednoho vektoru do směru druhého, které jsme shromáždili v kap. 5.4.3. Vidíme, že vektor $\vec{b}_2$, který má být kolmý k $\vec{b}_1$, dostaneme jako součet vektoru $\vec{a}_2$ s vektorem $\vec{u}'$, který je vektorem opačným k vektoru $\vec{u}$, jehož velikost je rovna kolmému průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$ (viz kap. 5.4.3, str. 72). Pro velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$ platí

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1|}{|\vec{b}_1|}. \tag{73}$$

Přitom výraz $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \geq 0$ pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ a $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 < 0$ pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, kde φ je úhel mezi vektory $\vec{b}_1$ (tj. také $\vec{a}_1$) a $\vec{a}_2$. Pravdivost tohoto vztahu pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ snadno prokážeme rozepsáním jeho pravé strany podle vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů. Dostaneme vztah

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{|\vec{a}_2||\vec{b}_1| \cos\varphi}{|\vec{b}_1|} = |\vec{a}_2| \cos\varphi,$$

který odpovídá definici hodnoty funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku ($|\vec{a}_2|$ je délka přepony, $|\vec{u}|$ je délka odvěsny přilehlé k úhlu φ). Pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ stačí uvažovat úhel $\pi - \varphi$.

Známe tedy velikost vektoru $\vec{u}$ (viz (73)) a víme, že má směr vektoru $\vec{b}_1$ (nebo opačný, pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$). Stačí tedy vynásobit číslem $\dfrac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}$ jednotkový vektor směru $\vec{b}_1$ a dostaneme vektor $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2} \vec{b}_1$$

Podle obrázku 30 je potom vhodným vektorem $\vec{b}_2$ součet $\vec{a}_2 + \vec{u}'$, kde $\vec{u}' = -\vec{u}$, tj.

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{u}' = \vec{a}_2 - \vec{u} = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2} \vec{b}_1. \tag{74}$$

Vztah (74) je totožný se vztahem (70). Geometrickou úvahou jsme tak dostali stejný výsledek jako výpočtem. (*konec poznámky*)

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} \quad . \tag{75}$$

PŘÍKLAD 6.4. *Určete ortonormální bázi podprostoru $W \subseteq\subseteq R^3$, který je generován vektory $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$.*

Řešení:

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{v}_1 = (1,1,2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1,1,2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1,1,2)$ a $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + k\vec{b}_1 = (0,1,-1) + k(1,1,2) \tag{76}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1,1,2)\cdot(0,1,-1) + k(1,1,2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1,1,2)\cdot(0,1,-1)}{(1,1,2)^2} = \frac{1}{6},$$

kterou dosadíme do vztahu (76) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (0,1,-1) + \frac{1}{6}(1,1,2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{-2}{3}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 6, abychom se zbavili zlomků. Tuto úpravu oceníme zanedlouho při normování vektoru. Hledanou ortogonální bázi podprostoru W tak tvoří vektory

$$\vec{b}_1 = (1,1,2), \quad \vec{b}_2 = (1,7,-4). \tag{77}$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{-4}{\sqrt{66}}\right). \tag{78}$$

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) load(eigen);
```

(%o1) $C:/PROGRA2/MAXIMA1.0/share/maxima/5.26.0/share/matrix/eigen.mac$

```
(%i2) b:gramschmidt({[1,1,2],[0,1,-1]});
```

(%o2) $[[0,1,-1],[1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}]]$

```
(%i3) e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);
```

(%o3) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

(%o4) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}}]$

Poznámka. Vidíme, že algoritmus, který se skrývá za příkazem „gramschmidt“, nezpracovává vektory v pořadí, v jakém je zadáme, ale volí si optimální pořadí sám. Stejně můžeme postupovat i my.

6.2.2 Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 3

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (36) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

Postup vytvoření prvních dvou vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze je identický s výše popsaným případem podprostoru dimenze 2. Platí tedy

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{79}$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ a $\vec{a}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 \tag{80}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 + n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 = 0, \tag{81}$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + n\vec{b}_2^2 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 + n\vec{b}_2^2 = 0. \tag{82}$$

Z těchto podmínek (81), (6.2.1) kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}, \quad n = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2} \tag{83}$$

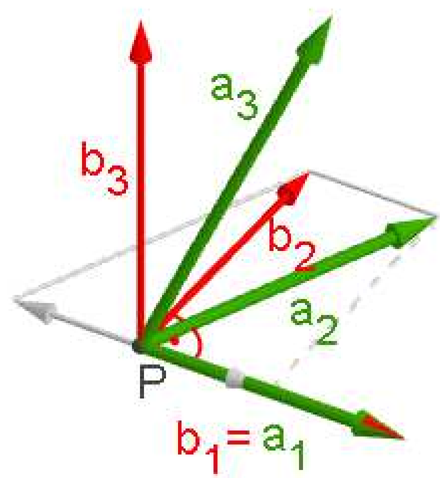
které dosadíme do vztahu (80) pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{84}$$

Rovnostmi (79) a (84) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{85}$$

Poznámka. I v případě nalezení třetího vektoru ortogonální báze můžeme uplatnit „ryze geometrický" přístup. Tentokrát bychom použili opačné vektory ke dvěma kolmým průmětům vektoru $\vec{a}_3$ do směrů vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$, které bychom složili s vektorem $\vec{a}_3$, abychom dostali vektor $\vec{b}_3$ kolmý na oba vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$. Detailně se zde tímto postupem nebudeme zabývat.



Obrázek 31: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 3 - vytvoření ortogonální báze

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}. \tag{86}$$

PŘÍKLAD 6.5. *Určete ortonormální bázi vektorového prostoru* $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$.

Řešení:

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{u}_1 = (1,1,-1,-2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2)$ a $\vec{u}_2 = (1,0,1,1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{u}_2 + k\vec{b}_1 = (1,0,1,1) + k(1,1,-1,-2) \tag{87}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1,1,-1,-2)\cdot(1,0,1,1) + k(1,1,-1,-2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1,1,-1,-2)\cdot(1,0,1,1)}{(1,1,-1,-2)^2} = \frac{2}{7},$$

kterou dosadíme do vztahu (87) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (1,0,1,1) + \frac{2}{7}(1,1,-1,-2) = \left(\frac{9}{7},\frac{2}{7},\frac{5}{7},\frac{3}{7}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 7, abychom se zbavili zlomků. Dostaneme

$$\vec{b}_2 = (9,2,5,3).$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2), \vec{b}_2 = (9,2,5,3)$ a $\vec{u}_3 = (0,1,1,0)$

$$\vec{b}_3 = \vec{u}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 = (0,1,1,0) + m(1,1,-1,-2) + n(9,2,5,3)$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = (1,1,-1,-2)\cdot(0,1,1,0) + m(1,1,-1,-2)^2 + n(1,1,-1,-2)\cdot(9,2,5,3) = 7m = 0,$$
$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = (9,2,5,3)\cdot(0,1,1,0) + m(9,2,5,3)\cdot(1,1,-1,-2) + n(9,2,5,3)^2 = 7 + 119n = 0.$$

Z těchto podmínek kolmosti vektorů ortogonální báze (všimněte si, že v tomto případě jsou vektory $\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2)$ a $\vec{u}_3 = (0,1,1,0)$ již na sebe kolmé) vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = 0, \quad n = -\frac{1}{17}$$

které dosadíme do vztahu pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = (0,1,1,0) + 0(1,1,-1,-2) - \frac{1}{17}(9,2,5,3) = \left(-\frac{9}{17},\frac{15}{17},\frac{12}{17},-\frac{3}{17}\right).$$

Vektor $\vec{b}_3$ násobíme 17, abychom se zbavili zlomků. Potom vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W jsou

$$\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2), \quad \vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3), \quad \vec{b}_3 = (-9, 15, 12, -3).$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right),\\
\vec{e}_2 &= \left(\frac{9}{\sqrt{119}}, \frac{2}{\sqrt{119}}, \frac{5}{\sqrt{119}}, \frac{3}{\sqrt{119}}\right),\\
\vec{e}_3 &= \left(-\frac{9}{\sqrt{459}}, \frac{15}{\sqrt{459}}, \frac{12}{\sqrt{459}}, -\frac{3}{\sqrt{459}}\right).
\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima (kód navazuje na řešení předcházejícího příkladu):

```
(%i5) kill(b);
```

(%o5) *done*

```
(%i6) b:gramschmidt({[1,1,-1,-2],[1,0,1,1],[0,1,1,0]});
```

(%o6) $[[0,1,1,0],[1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1],[\frac{3^2}{5},\frac{3}{5},-\frac{3}{5},-\frac{2\,3}{5}]]$

```
(%i7) e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);
      e[3]:unitvector(b[3]);
```

(%o7) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]$

(%o8) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}]$

(%o9) $[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}]$

Poznámka. Příkaz „gramschmidt“ opět volil jiné pořadí zpracování vektorů a našel jinou ortogonální bázi, s „lépe vypadajícími“ vektory.

Kromě volby vhodného pořadí vektorů si ruční výpočet vektorů ortonormální báze daného podprostoru můžeme v řadě případů podstatně zjednodušit také tím, že daný systém generátorů nahradíme vektory, které jsme získali eliminací příslušné matice. V případě příkladu 6.5 jsme tak mohli místo původních vektorů $(1, 1, -1, -2)$,

$(1,0,1,1)$, $(0,1,1,0)$ počítat s vektory $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,-1)$, $(0,0,1,1)$, které generují stejný podprostor, protože

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vyzkoušejte!

6.3 Cvičení: Ortonormální báze

1. Určete ortonormální báze následujících vektorových podprostorů $\mathbb{R}^3$:

a) Rovina generovaná vektory $(0,2,1)$, $(1,-2,-1)$.

b) Rovina definovaná rovnicí $2x - y + 3z = 0$.

c) Množina všech vektorů kolmých na vektor $(1,-1,-2)$.

2. Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = [\{(1,1,2),(1,0,1)\}] \subseteq\subseteq V_3$.

Příklady pro dobrovolné řešení

3. Určete ortonormální bázi vektorového (pod)prostoru W :
a) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}]$; $\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (0,1,1)$,

b) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (1,0,1)$,

c) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,2)$, $\vec{v}_3 = (2,-2,3)$,

d) $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1,1,2,1), \vec{u}_2 = (0,1,1,1), \vec{u}_3 = (3,1,0,1)$.

4. Určete ortonormální bázi vektorového podprostoru $V \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4$, který obsahuje všechny vektory kolmé na vektor $\vec{u} = (1,2,-1,-3)$.

6.4 Ortogonální matice

Z geometrie víme, že afinní transformace bodového prostoru A_n daná rovnicí

$$X = AX' + B,$$

$X, X' \in A_n$, je shodností právě tehdy, když pro matici A platí vztah

$$A^T A = I, \tag{88}$$

kde I je jednotková matice řádu n[1]. Matice A je čtvercová a uvedený vztah je možné rozepsat rovnicemi pro její prvky. Například pro afinní transformaci roviny, jejíž matice má tvar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

je podmínka (88) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{89}$$

V případě afinní transformace prostoru A_n s maticí

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je podmínka (88) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0, \ \ i \neq j, \ \ i, j = 1, 2, \dots n, \tag{90}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \ \ i = 1, 2, \dots n. \tag{91}$$

Porovnáme-li vztahy (90), (91) s definicí ortonormálních vektorů (viz def. 17), vidíme, že řádkové vektory matice A shodnosti v prostoru A_n jsou ortonormální (platí to i pro sloupcové vektory matice A). Protože ortogonální vektory jsou vždy nezávislé (viz věta 19), můžeme podle definice 18 dokonce říci, že řádkové (sloupcové) vektory matice A tvoří ortonormální bázi. Takovouto matici nazýváme „ortogonální matice“ (někdy též „ortonormální matice“[2]).

[1] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 55
[2] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 57

Definice 19 (Ortogonální matice). *Ortogonální maticí rozumíme čtvercovou matici A, pro kterou platí:*

$$A^T \cdot A = I.$$

Poznámky.

1. Po ortogonální matici A zřejmě platí $A^T = A^{-1}$. Potom ale též

$$A \cdot A^T = I.$$

2. V *ortogonální matici* je skalární součin dvou různých řádků roven nule, skalární součin stejných řádků je roven jedné. Symbolicky zapsáno:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_i^j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. *Determinant ortogonální matice.* Pro A platí

$$A^T \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad \det\left(A^T \cdot A\right) = \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = \det I = 1.$$

Potom

$$|\det A| = 1,$$

jinak zapsáno

$$\det A = \pm 1.$$

PŘÍKLAD 6.6. *Transformace, pro které je $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinity. Vymyslete čtvercovou matici druhého řádu, jejíž determinant je 1, ale matice není ortogonální. Ukážete tak, že ne každá ekviafinita má matici A ortogonální, tj. že ne každá ekviafinita je shodností.*

PŘÍKLAD 6.7. *Ukažte, že*

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

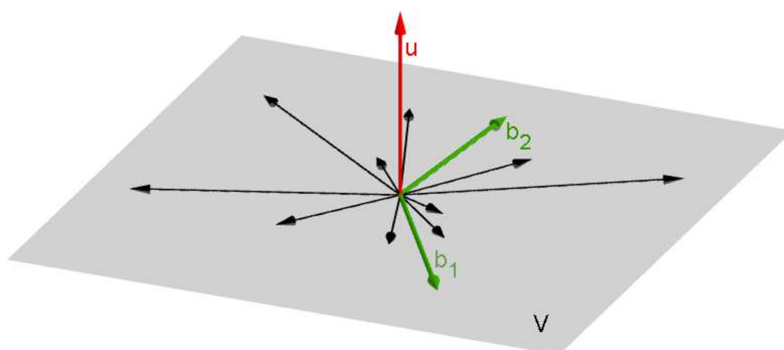
matice otočení kolem počátku soustavy souřadné o úhel α, je ortogonální matice. Spočítejte její determinant.

7 Kolmost vektorových podprostorů

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Od kolmosti dvou vektorů nyní přejdeme ke kolmosti dvou vektorových podprostorů. Budeme se zabývat otázkou, kdy jsou dva vektorové podprostory na sebe kolmé a jak to poznáme. Začneme tím, že stanovíme, jak určit kolmost jednoho vektoru k podprostoru.

7.1 Kolmost vektoru k podprostoru



Obrázek 32: Vektor $\vec{u}$ kolmý k podprostoru $V = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$

Definice 20 (Kolmost vektoru k podprostoru)**.** *O vektoru $\vec{u}$ řekneme, že je kolmý k vektorovému podprostoru V_k, právě když je kolmý ke každému vektoru z tohoto podprostoru. Značíme*

$$\vec{u} \perp V_k.$$

Uvedená definice nám nedává přímý návod, jak o kolmosti vektoru k vektorovém podprostoru rozhodnout. Vektorů je ve vektorovém podprostoru nekonečně mnoho a ověření kolmosti daného vektoru ke každému z nich je proto nereálné. Naštěstí však víme, že každý vektor z vektorového podprostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů jeho báze, a báze už má konečný počet vektorů (viz Obr. 32).

Věta 21 (Kritérium kolmosti vektoru k podprostoru)**.** *Vektor $\vec{u} \in V_n$ je kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k\}$.*

Důkaz. Podle definice 20 je vektor $\vec{u} \in V_n$ kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$ právě tehdy, když je kolmý ke každému vektoru $\vec{v} \in V_k$, tj. když pro každý vektor $\vec{v} \in V_k$ platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{92}$$

Protože $V_k = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k]$, můžeme každý vektor $\vec{v} \in V_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{b}_k$. Po dosazení do (92) a roznásobení tak dostáváme rovnost

$$v_1\vec{u} \cdot \vec{b}_1 + v_2\vec{u} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0, \tag{93}$$

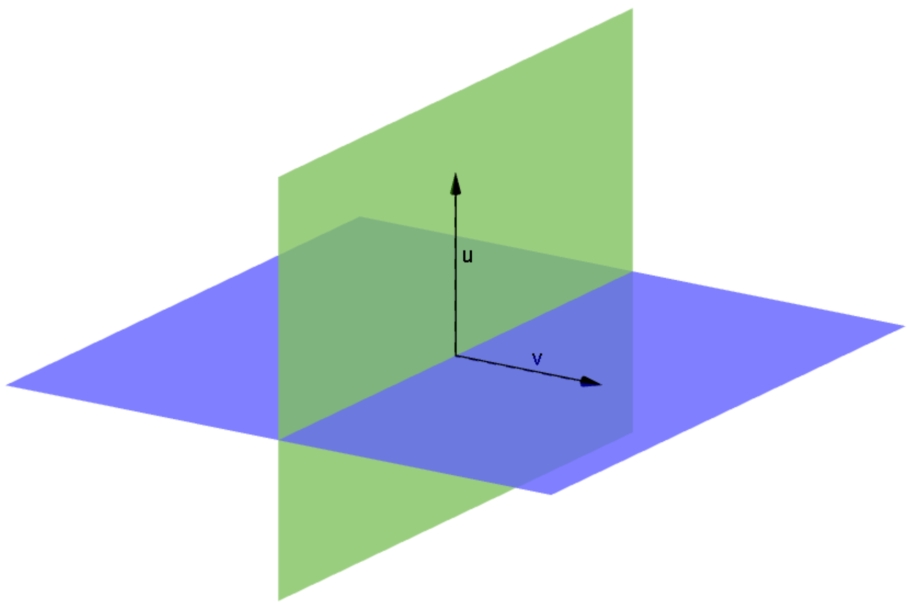
která je určitě splněna, jestliže je vektor $\vec{u}$ kolmý ke všem vektorům báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k$, tj., jestliže

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2 = \cdots = \vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0. \tag{94}$$

□

7.2 Kolmost dvou podprostorů

Kolmost vektoru k vektorovému podprostoru využijeme v definici a při určení kolmosti dvou vektorových podprostorů.



Obrázek 33: Dva kolmé podprostory

Definice 21 (Kolmost vektorových podprostorů). *Dva vektorové podprostory $V_r, V_s \subseteq\subseteq V_n$ jsou na sebe kolmé, jestliže v každém z nich existuje vektor, který je kolmý k druhému podprostoru. Značíme*

$$V_r \perp V_s$$

Při rozhodování o kolmosti dvou konkrétních vektorových podprostorů daných svými bázemi budeme využívat „nutnou a postačující podmínku kolmosti dvou podprostorů“, která je formulována v následující větě 22. Než ji uvedeme, objasníme si její smysl (a tím i myšlenku jejího důkazu, který přenecháme čtenáři) na příkladu dvou podprostorů dimenzí 2 a 3.

PŘÍKLAD 7.1. *Rozhodněte, za jakých podmínek jsou na sebe kolmé podprostory* $V_2 = [\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}], V_3 = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}]$

Řešení: Dle definice 21 jsou dané dva vektorové podprostory V_2, V_3 na sebe kolmé, jestliže v prostoru V_2 existuje nějaký vektor $\vec{x}$, který je kolmý k podprostoru V_3, a zároveň v podprostoru V_3 existuje vektor $\vec{y}$ kolmý k prostoru V_2. K popsání těchto skutečností využijeme tvrzení věty 21 („vektor je kolmý k podprostoru, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze").

1. Existuje vektor $\vec{x} \in V_2$, který je kolmý k V_3.

Jestliže vektor $\vec{x}$ náleží podprostoru V_2, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Dle věty 21 je vektor $\vec{x}$ kolmý k podprostoru V_3, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{b}_1 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 = 0, \\ \vec{x} \cdot \vec{b}_2 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0, \\ \vec{x} \cdot \vec{b}_3 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Homogenní soustava (95) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$A_1 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{96}$$

má hodnost menší než 2.

2. Existuje $\vec{y} \in V_3$, který je kolmý k V_2.

Jestliže vektor $\vec{y}$ náleží podprostoru V_3, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Dle věty 21 je vektor $\vec{y}$ kolmý k podprostoru V_2, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned} \vec{y} \cdot \vec{a}_1 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0 \\ \vec{y} \cdot \vec{a}_2 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_2 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_2 = 0 \end{aligned} \tag{97}$$

Homogenní soustava (97) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$A_2 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{98}$$

má hodnost menší než 3 (což je v tomto případě určitě splněno).

Vidíme, že pro kolmost podprostorů V_2, V_3 jsou rozhodující hodnosti matic A_1, A_2. Protože $A_2 = A_1^T$ a $h(A_2) = h(A_1^T)$, stačí uvažovat jenom jednu z těchto matic, například A_2, kterou v souladu s následující větou označíme G. Aby byly podprostory

V_2, V_3 na sebe kolmé, tj. aby měly obě uvedené soustavy (95), (97) nenulová řešení, musí být hodnost matice

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{99}$$

menší než 2. V obecném případě bychom řekli, že hodnost takovéto matice musí být menší než minimum z dimenzí posuzovaných vektorových prostorů, jak uvádí následující věta.

Věta 22 (Nutná a postačující podmínka kolmosti dvou podprostorů)**.** *Dva vektorové podprostory V_r a V_s s bázemi $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ a $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když pro hodnost matice*

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_s \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{a}_r \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_s \end{bmatrix}$$

platí

$$h(G) < \min(r, s).$$

PŘÍKLAD 7.2. *Rozhodněte, zda jsou dané vektorové podprostory prostoru R^4 na sebe kolmé:*

a) $V_2 = [(1,0,1,1),(0,2,-1,1)]$, $V_3 = [(0,1,0,1),(1,0,-1,2),(1,2,1,-2)]$,

b) $V_2 = [(1,1,2,-1),(3,0,1,-1)]$, $V_3 = [(1,0,1,2),(2,-3,2,2),(1,1,1,-2)]$,

c) $V_1 = [(1,0,-1,2)]$, $V_3 = [(0,1,2,1),(1,3,-1,-1),(2,1,0,-1)]$.

Poznámka. Zvláštní kategorii vzájemně *kolmých podprostorů* daného vektorového prostoru V_n tvoří tzv. *totálně kolmé podprostory.* Jedná se o dvojice podprostorů, které jsou kolmé a součet jejich dimenzí je přitom roven n. Říkáme, že tyto podprostory jsou vzájemně svými *ortogonálními doplňky.*

7.3 Ortogonální doplněk vektorového podprostoru

PŘÍKLAD 7.3. *Určete množinu všech vektorů z V_3, které jsou kolmé (ortogonální) k vektoru $\vec{u} = (2, 1, -3)$.*

Řešení: Hledáme množinu $W \subseteq V_3$, pro kterou platí: $\forall \vec{x} \in W;\ \vec{u} \cdot \vec{x} = 0$, tj. množinu všech řešení homogenní rovnice

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \tag{100}$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$. Rovnici (100) můžeme uvažovat jako „soustavu" jedné rovnice o třech neznámých. Potom dvě ze tří neznámých, např. x_1 a x_3 nahradíme reálnými parametry a zbývající neznámou x_2 dopočítáme. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= r, \\ x_3 &= s, \\ x_2 &= -2r + 3s;\ r, s \in R \end{aligned} \tag{101}$$

a hledanou množinu W zapíšeme ve tvaru

$$W = \{(r, -2r + 3s, s); r, s \in R\}. \tag{102}$$

Protože $W = \{(r, -2r + 3s, s); r, s \in R\} = \{r(1, -2, 0) + s(0, 3, 1); r, s \in R\}$, můžeme W psát jako lineární obal dvojice vektorů $(1, -2, 0), (0, 3, 1)$,

$$W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]. \tag{103}$$

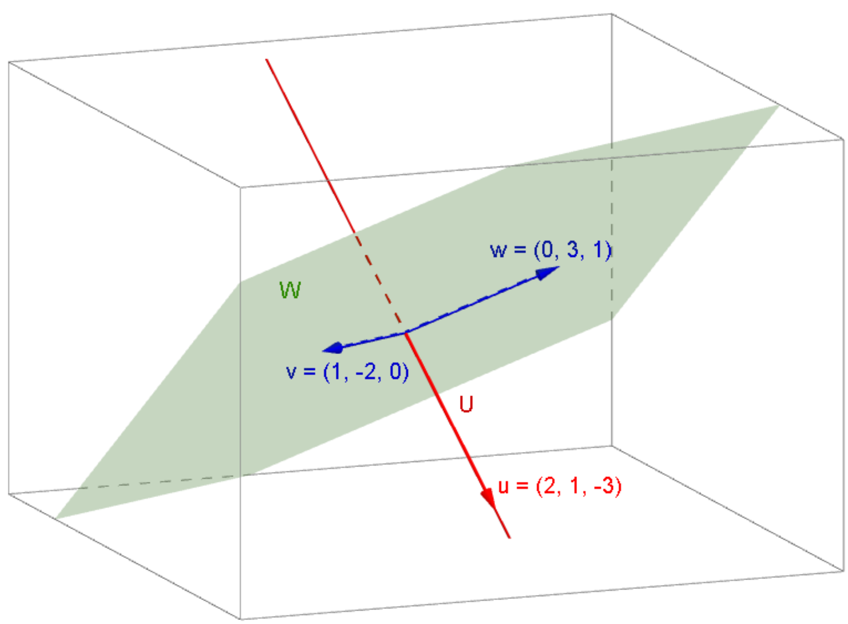
Potom je, jak již víme, W vektorovým podprostorem V_3,

$$W \subseteq\subseteq V_3.$$

Pokud budeme uvažovat také podprostor generovaný vektorem $\vec{u}$,

$$U = [\{(2, 1, -3))\}], \tag{104}$$

tvoří U, W dvojici vzájemně se ortogonálně doplňujících podprostorů vektorového



Obrázek 34: $U = [\{(2, 1, -3))\}], W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]$

prostoru V_3 (viz Obr. 34), značíme

$$U = W^{\perp}, \quad W = U^{\perp}$$

a čteme „podprostor U je ortogonálním doplňkem podprostoru W", resp. „podprostor W je ortogonálním doplňkem podprostoru U".

Poznámka. Ve vektorovém prostoru dimenze 3 je ortogonálním doplňkem roviny (přesněji vektorového prostoru dimenze 2) přímka na ní kolmá (vektorový prostor dimenze 1, jehož vektory jsou ortogonální se všemi vektory té roviny) a ortogonálním doplňkem přímky je naopak rovina.

Definice 22 (Ortogonální doplněk vektorového podprostoru)**.** *Ortogonálním doplňkem vektorového podprostoru $V_k \subseteq V_n$ rozumíme množinu všech vektorů kolmých (ortogonálních) k V_k. Značíme $V_k^{\perp}$.*

Ortogonální doplněk vektorového podprostoru je vektorový prostor a jeho dimenze je $n-k$. Důkaz toho, že se jedná o vektorový prostor přenecháme čtenáři. Stačí na danou množinu uplatnit větu 9 (o určení vektorového podprostoru). Zde se zaměříme jenom na údaj o dimenzi $n-k$ podprostoru $V_k^{\perp}$.

Věta 23 (Dimenze ortogonálního doplňku)**.** *Je-li V_k podprostor vektorového prostoru V_n, je jeho ortogonální doplněk $V_k^{\perp}$ vektorový prostor dimenze $n-k$.*

Důkaz. Nechť $V_k = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$, kde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ je ortonormální báze. Potom pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in V_k^{\perp}$ musí platit $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = 0$; $i = 1, 2, \dots, k$. Dostáváme tak homogenní soustavu k rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0, \end{aligned} \tag{105}$$

jejíž matice má hodnost k (její řádkové vektory $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, k$ jsou ortonormální, proto jsou dle věty 19 lineárně nezávislé). Z n neznámých je tedy k základních a $n-k$ volných. Proto musíme použít $n-k$ parametrů a množinou všech řešení soustavy, tj. ortogonálním doplňkem prostoru V_k, je tak vektorový prostor dimenze $n-k$. ☐

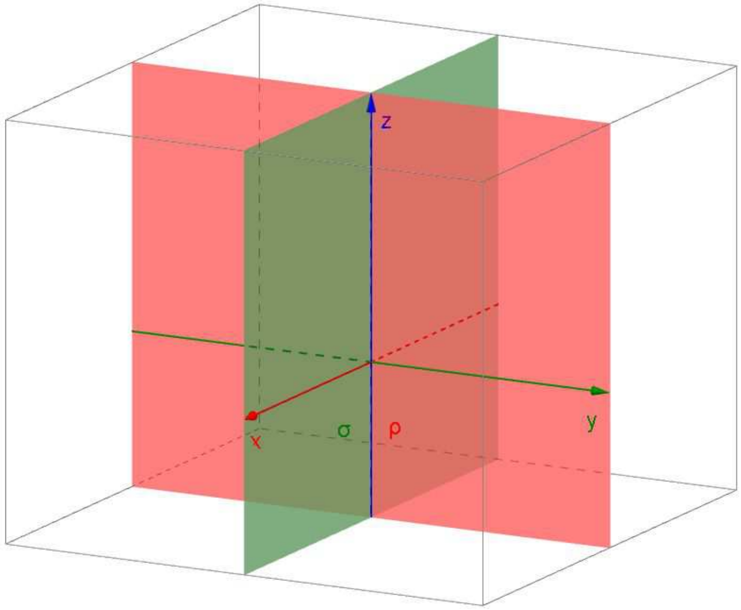
Poznámka. Z výše uvedeného vyplývá, že součet dimenzí dvou vektorových podprostorů prostoru V_n, které jsou vzájemně svými ortogonálními doplňky, je n. Tj. pro $V_r, V_s \subseteq V_n$, kde $V_r = V_s^{\perp}$ (a tedy také $V_s = V_r^{\perp}$), platí

$$r + s = n.$$

Jak bylo uvedeno již v poznámce na straně 97, rozlišujeme podprostory *kolmé* ($V_r \perp V_s$) a podprostory *totálně kolmé* ($V_r = V_s^{\perp}$ a $V_s = V_r^{\perp}$). Přitom prostory totálně kolmé jsou zároveň i kolmé, avšak naopak to neplatí. Ne každé kolmé prostory jsou zároveň také totálně kolmé.

PŘÍKLAD 7.4. *Uveďte příklad vektorových podprostorů, které jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé.*

Řešení: Například dvě na sebe kolmé roviny $\rho : x = 0$ a $\sigma : y = 0$ v prostoru V_3 jsou *kolmé*, ale nejsou *totálně kolmé* (součet jejich dimenzí je 4, tj. větší než dimenze „mateřského“ prostoru V_3), viz Obr. 35.



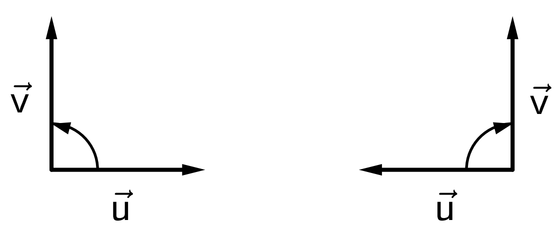
Obrázek 35: Roviny $\rho : x = 0$, $\sigma : y = 0$ jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé

8 Orientace báze vektorového prostoru

Rozlišujeme *pravotočivou* (též *kladnou*) a *levotočivou* (též *zápornou*) bázi vektorového prostoru.

Význam pojmů *kladná* a *záporná* orientace je v souladu s tím, jak je používáme například v planimetrii při nanášení orientovaných úhlů. *Kladný* smysl má pohyb proti směru pohybu hodinových ručiček, *záporný* smysl pak je přisouzen pohybu ve směru pohybu hodinových ručiček. Pohyb v kladném smyslu je *pravotočivý*, protože ho, velmi zjednodušeně řečeno[6], můžeme v daném směru přirozeně realizovat prsty pravé ruky. V případě pohybu v záporném smyslu pak hovoříme o *levotočivém* pohybu, protože přirozeně použijeme levou ruku.

Uvažujme bázi (pro jednoduchost ortonormální) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ prostoru V_2. Jak vidíme na



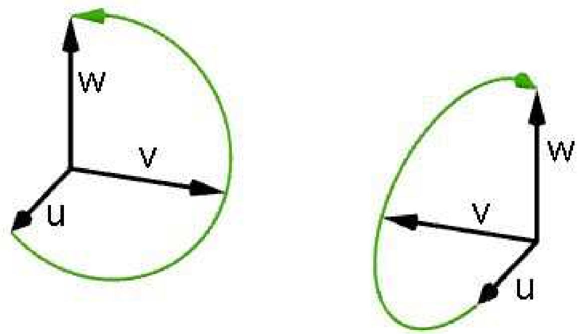
Obrázek 36: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_2

Obr. 36, vektory $\vec{u}, \vec{v}$ můžeme v rovině uspořádat dvěma způsoby, pro které je typické, že chceme-li přejít od jednoho k druhému, nestačí nám vektory pootočit, musíme použít osovou souměrnost. Podle smyslu přechodu od vektoru $\vec{u}$ k vektoru $\vec{v}$ označujeme tyto konfigurace vektorů i jimi tvořené báze jako *pravotočivou* (kladný smysl, Obr. 36, vlevo), respektive *levotočivou* (záporný smysl, Obr. 36, vpravo). Pro

[6] Exaktnější pojednání o pravidlech pravé a levé ruky viz např. Wikipedia: Right hand rule

pravotočivé báze používáme též označení *kladné báze*, pro levotočivé pak *záporné báze*.

Stejně rozdělujeme báze v trojrozměrném prostoru[1]. Uvažujme bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ vektorového prostoru V_3. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ můžeme opět uspořádat dvěma způsoby, mezi kterými nelze přejít pouhým otočením, ale musíme použít souměrnost podle roviny. Konfiguraci, v níž při přechodu mezi vektory v pořadí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ postupujeme v klad-



Obrázek 37: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_3

ném smyslu, nazýváme *pravotočivou* (též *kladnou*) bází (Obr. 37, vlevo), konfiguraci, v níž postupujeme v záporném smyslu, nazýváme *levotočivou* (též *zápornou*) bází (Obr. 37, vpravo).

Vektorový prostor, v němž používáme takto orientované báze, nazýváme *orientovaný vektorový prostor*.

8.1 Matice přechodu mezi dvěma bázemi

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Máme-li ve vektorovém prostoru zavedeny dvě báze, můžeme souřadnice vektoru vzhledem k jedné z nich převést na souřadnice tohoto vektoru vzhledem k druhé z nich pomocí tzv. *matice přechodu mezi bázemi*, jak ukazuje následující příklad 8.1.

Každá matice přechodu mezi dvěma bázemi je regulární (proč?) a tak je její determinant různý od nuly. Pokud je kladný, jsou příslušné báze stejně orientované (tj. obě jsou kladné, nebo jsou obě záporné), pokud je determinant matice přechodu záporný, jsou příslušné báze opačně orientované (tj. jedna je kladná a druhá je záporná).

PŘÍKLAD 8.1. *Vektor $\vec{u} \in V_2$ je dán souřadnicemi $\vec{u}_B = (u'_1, u'_2)$ vzhledem k bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_A = (u_1, u_2)$ vzhledem k bázi $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.*

[1] Pojem orientace báze a vektorového prostoru se dá samozřejmě zavést obecně pro vektorové prostory dimenze n, viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 105–107

Řešení: Vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ báze B samozřejmě patří do vektorového prostoru V_2, můžeme je proto vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ báze A

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2, \\ \vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2. \end{aligned} \tag{106}$$

Pokud soustavu (106) napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{bmatrix}, \tag{107}$$

figuruje v něm tzv. *matice přechodu of báze A k bázi B*

$$P(A, B) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \tag{108}$$

Vektor $\vec{u}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů obou daných bází

$$\vec{u} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = u_1'\vec{b}_1 + u_2'\vec{b}_2$$

a za vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$ dosadíme výrazy z rovnic (106)

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = u_1'(p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2) + u_2'(p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2).$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = (u_1'p_{11} + u_2'p_{21})\vec{a}_1 + (u_1'p_{12} + u_2'p_{22})\vec{a}_2,$$

v níž porovnáme sobě odpovídající koeficienty u vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ na levé a pravé straně. Výslednou soustavu

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_1'p_{11} + u_2'p_{21} \\ \vec{u}_2 &= u_1'p_{12} + u_2'p_{22} \end{aligned}$$

potom můžeme zapsat maticovou rovnicí, v níž figuruje *matice přechodu od báze A k bázi B* (108)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' & u_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \tag{109}$$

nebo schematicky pomocí daných vektorů

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B \cdot P(A, B). \tag{110}$$

PŘÍKLAD 8.2. *Vektor $\vec{u}$ má vzhledem k bázi $M = \{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3\}$ vektorového prostoru V_3 souřadnice $\vec{u}_M = (2, 1, -3)$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_N$ vzhledem k bázi $N = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, jestliže platí: $\vec{m}_1 = 4\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2 - \vec{n}_3$, $\vec{m}_2 = -3\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + 2\vec{n}_3$, $\vec{m}_3 = -2\vec{n}_1 - 3\vec{n}_2 + 11\vec{n}_3$.*

Řešení: Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= 4\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2 - \vec{n}_3,\\ \vec{m}_2 &= -3\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + 2\vec{n}_3,\\ \vec{m}_3 &= -2\vec{n}_1 - 3\vec{n}_2 + 11\vec{n}_3\end{aligned}$$

získáme matici přechodu od báze N k bázi M

$$P(N,M) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix},$$

kterou dle (110) vynásobíme zprava vektor $\vec{u}_M = (2,1,-3)$, abychom dostali hledané souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi N

$$\vec{u}_N = (2,1,-3) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix} = (11,6,-34).$$

PŘÍKLAD 8.3. *Najděte matici přechodu od báze M k bázi N a naopak, od N k M, jestliže $M = \{(1,1),(0,2)\}$, $N = \{(2,1),(1,2)\}$.*

Řešení: Podle (107) můžeme psát $N = P(M,N) \cdot M$. Po dosazení za M a N tak dostaneme maticovou rovnici $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P(M,N) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, jejímž řešením je matice $P(M,N) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Protože pro matici $P(N,M)$ platí podle (107) rovnice $M = P(N,M) \cdot N$, je zřejmé, že $P(N,M) = P(M,N)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 8.4. *Najděte matice přechodu mezi uvedenými (ortonormálními) bázemi $E = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, $F = \{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$ vektorového prostoru V_2.*
a) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$,

b) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$,

Řešení:
ad a) $P(E,F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F,E) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

ad b) $P(E,F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F,E) = P(E,F)$.

Poznámka. Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je ortogonální. Její determinant je roven 1 (příslušné báze jsou souhlasné) nebo -1 (příslušné báze jsou nesouhlasné).