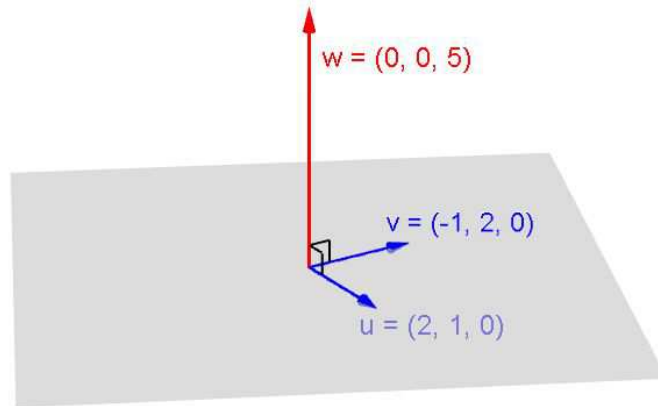


## 9 Vektorový součin

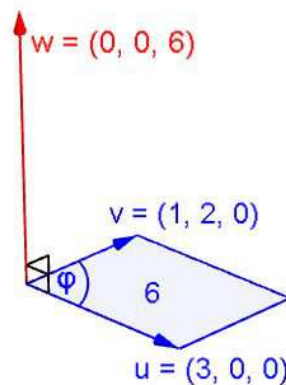
*Vektorový součin* je operace definovaná ve vektorovém prostoru dimenze 3, do které vstupují dva vektory (tj. binární operace) a jejímž výsledkem je vektor na tyto dva vektory kolmý (viz Obr. 38). Vektorový součin vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  zapisujeme  $\vec{u} \times \vec{v}$ . Výsledný vektor též nazýváme *vektorový součin*. Zobecněním vektorového součinu



Obrázek 38: Vektorový součin  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

pro prostory dimenze  $n$  je tzv. *ortogonální doplněk  $n-1$  vektorů*, operace, do níž vstupuje  $n - 1$  vektorů a jejímž výsledkem je jeden vektor na všechny tyto vektory kolmý.

Formuli pro výpočet souřadnic vektorového součinu  $\vec{u} \times \vec{v}$  odvodíme na základě následujících tří požadovaných vlastností výsledného vektoru (viz Obr. 39):



Obrázek 39:  $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin \varphi$

- i. Vektorový součin  $\vec{u} \times \vec{v}$  je kolmý (ortogonální) k vektorům  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , tj.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0, \quad (111)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0. \quad (112)$$

- ii. Vektorový součin  $\vec{u} \times \vec{v}$  tvoří spolu s nezávislými vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  pravotočivou bázi.

iii. Velikost (norma) vektoru  $\vec{u} \times \vec{v}$  je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , tj.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi. \quad (113)$$

Nejprve si uvědomíme, jaké důsledky plynou z uvedených vlastností pro *pravotočivou ortonormální bázi* vektorového prostoru  $V_3$ . Uvažujme například *kanonickou bázi* a označme si její vektory  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Protože jsou tyto vektory (i) na sebe kolmé, (ii) tvoří pro nezávislé  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  pravotočivou bázi a (iii) obsah rovnoběžníku (čtverce) vymezeného každými dvěma z nich je 1, je zřejmé, že platí:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad (114)$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad (115)$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}. \quad (116)$$

Vektory  $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$  nyní vyjádříme pomocí vektorů této ortonormální báze

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}, \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},$$

zapišeme jejich vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}),$$

který za předpokladu platnosti příslušného distributivního zákona roznásobíme

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= u_1v_1\vec{i} \times \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \times \vec{j} + u_1v_3\vec{i} \times \vec{k} + \\ &\quad + u_2v_1\vec{j} \times \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \times \vec{j} + u_2v_3\vec{j} \times \vec{k} + \\ &\quad + u_3v_1\vec{k} \times \vec{i} + u_3v_2\vec{k} \times \vec{j} + u_3v_3\vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

a s použitím vztahů (114), (115), (116) zjednodušíme na tvar

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}. \quad (117)$$

Z (117) vyplývá, že vektorový součin  $\vec{u} \times \vec{v}$  vektorů  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  je vektor, řekněme mu třeba  $\vec{w}$ , jehož souřadnice vypočítáme ze souřadnic vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  takto

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \quad (118)$$

Nyní si ověříme, že vektor  $\vec{w}$  definovaný (118) skutečně splňuje ony tři výše uvedené požadavky i–iii.

ad i) Ověříme splnění podmínek ortogonálnosti vektorů  $\vec{w}$  a  $\vec{u}$ , resp.  $\vec{w}$  a  $\vec{v}$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 + u_3v_1u_2 - u_1v_3u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 = 0.$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = u_2 v_3 v_1 - u_3 v_2 v_1 + u_3 v_1 v_2 - u_1 v_3 v_2 + u_1 v_2 v_3 - u_2 v_1 v_3 = 0.$$

ad ii) Pro ověření, že vektory  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  tvoří kladnou bázi dosadíme za  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  vektory kanonické báze  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  a  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ . Podle (118) je potom  $\vec{i} \times \vec{j} = (0, 0, 1) = \vec{k}$ . Vektorový součin skutečně tvoří spolu s danými dvěma vektory kladnou bázi.

ad iii) To, že vektor  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  definovaný vztahem (118) má normu  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi$ , prokážeme dosazením souřadnic příslušných vektorů. Před tím však ještě obě strany této rovnosti umocníme na druhou

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \varphi,$$

a vhodnou úpravou s využitím vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů se zbavíme goniometrické funkce sin

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \varphi),$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2 \varphi,$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2. \quad (119)$$

Únavné výpočty při dosazení souřadnic vektorů do poslední rovnosti a ověření její platnosti provedeme v programu wxMaxima.

Nejprve načteme balíček funkcí „vect“ pro počítání s vektory a zadáme souřadnice vektorů  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  (vektorový součin je v Maximě reprezentován symbolem  $\sim$ , výsledek, jak vidíme, odpovídá formulí (118))

```
(%i1) load(vect)$
```

```
(%i2) u: [u1,u2,u3]; v: [v1,v2,v3]; w: express(u~v);
```

```
(%o2) [u1, u2, u3]
```

```
(%o3) [v1, v2, v3]
```

```
(%o4) [u2 v3 - u3 v2, u3 v1 - u1 v3, u1 v2 - u2 v1]
```

Poté zapíšeme vztah (119) a odečtením porovnáme její levou a pravou stranu.

```
(%i5) Rovnice: (w.w)=(u.u)*(v.v)-(u.v)^2;
```

```
(%o5) (u2 v3 - u3 v2)^2 + (u3 v1 - u1 v3)^2 + (u1 v2 - u2 v1)^2 =
(u3^2 + u2^2 + u1^2) (v3^2 + v2^2 + v1^2) - (u3 v3 + u2 v2 + u1 v1)^2
```

```
(%i6) expand(lhs(Rovnice)-rhs(Rovnice));
```

```
(%o6) 0
```

Výsledek 0 znamená, že se obě strany (119) rovnají. Platnost vztahu (113) pro vektor  $\vec{w}$  definovaný formulí (118) je tím prokázána.

## 9.1 Výpočet vektorového součinu

Víme, že vektorový součin  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  vektorů  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  je vektor, jehož souřadnice jsou dány vztahem (viz též (118))

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \quad (120)$$

Není však nutné si tento vztah pamatovat a souřadnice vektorového součinu počítat dosazením do něj. Ukážeme si zde některé jednodušší způsoby jejich výpočtu. Začneme tím, že si všimneme, že výrazy pro jednotlivé souřadnice vektorového součinu v (120) se dají zapsat ve formě determinantů matic řádu 2, které obsahují souřadnice daných vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \quad (121)$$

Po rozepsání pomocí vektorů kanonické báze dostaneme rovnost

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad (122)$$

jejíž pravou stranu můžeme interpretovat jako rozvoj determinantu  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

podle posledního řádku. Zápis vektorového součinu vektorů  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  ve formě tohoto determinantu se snáze pamatuje a přináší i podstatné zjednodušení výpočtu jeho souřadnic

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}. \quad (123)$$

Buď pracujeme přímo s determinantem (123), nebo využijeme některý odvozený algoritmus. Jako například ten následující. Souřadnice vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  napíšeme pod sebe jako řádky matice (není nutné psát závorky), za kterou ještě přepíšeme její první dva sloupce

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 & \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 & \end{array} \quad (124)$$

V tomto schématu potom postupně na vybrané dvojice sloupců (2. a 3., 3. a 4., 4. a 5.) uplatňujeme *křížové pravidlo* a počítáme souřadnice vektorového součinu  $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{array}{ccc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_2v_3 - u_3v_2,$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_3v_1 - u_1v_3,$$

$$\begin{array}{ccc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_1v_2 - u_2v_1.$$

## 9.2 Vlastnosti vektorového součinu

Většinu vlastností vektorového součinu již známe. Zde si je souhrnně zopakujeme a přidáme několik dalších.

- (1) Vektorový součin  $\vec{u} \times \vec{v}$  je kolmý k vektorům  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ ;  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$ .
- (2) Nezávislé vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  tvoří spolu s vektorovým součinem  $\vec{u} \times \vec{v}$  pravotočivou<sup>1</sup> (kladnou) bázi  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ . Jsou-li vektory  $\vec{u}, \vec{v}$  závislé, je  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ .
- (3) Vektorový součin  $\vec{u} \times \vec{v}$  není komutativní;  $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ .
- (4) Distributivnost vzhledem ke sčítání vektorů;  $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
- (5) Asociativnost vzhledem k násobení skalárem;  $(c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v}) = c(\vec{u} \times \vec{v})$
- (6) Velikost (norma) vektoru  $\vec{u} \times \vec{v}$  je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ ;

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi. \quad (125)$$

Dle (119) platí pro druhou mocninu normy vektorového součinu

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}, \quad (126)$$

kde  $\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$  je tzv. *Gramův determinant* vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$ . Vztah  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$  je potom speciálním případem tzv. *Lagrangeovy identity*<sup>2</sup>

## 9.3 Užití vektorového součinu

S různými aplikacemi vektorového součinu se budeme setkávat v dalších partiích této publikace. Zde si uvedeme dva příklady - výpočet obecné rovnice roviny dané jedním bodem a dvěma nezávislými vektory a výpočet obsahu trojúhelníku daného souřadnicemi jeho vrcholů.

**PŘÍKLAD 9.1.** *Rovina  $\rho$  je dána bodem  $A = [-3, 2, 1]$  a dvěma nezávislými vektory  $\vec{u} = (-1, 1, 2)$  a  $\vec{v} = (-1, -3, 2)$ , určete její obecnou rovnici.*

<sup>1</sup>Tato skutečnost nám dovoluje určit směr vektorového součinu  $\vec{u} \times \vec{v}$  pomocí *pravidla pravé ruky*: Pravou ruku umístíme malíkovou hranou do roviny vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  tak, aby směr prstů odpovídal pořadí, v němž je násobíme (v případě  $\vec{u} \times \vec{v}$  směřují od  $\vec{u}$  k  $\vec{v}$ ), potom má vztyčený palec směr vektorového součinu  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

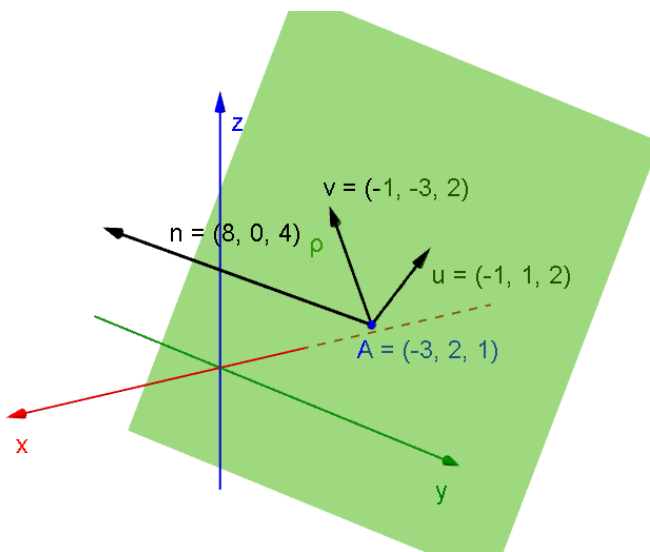
<sup>2</sup>Viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf>, str. 114–115.

*Řešení:* Obecná rovnice roviny má tvar  $ax+by+cz+d=0$ , kde  $(a, b, c)$  jsou souřadnice vektoru kolmého k této rovině, říkáme mu normálový vektor a značíme ho  $\vec{n}$ . K vyřešení příkladu tak stačí najít jakýkoliv normálový vektor roviny  $\rho$ , použít jeho souřadnice jako koeficienty  $a, b, c$  v obecné rovnici  $\rho: ax+by+cz+d=0$ , dosadit za  $x, y, z$  souřadnice bodu  $A$  a dopočítat hodnotu koeficientu  $d$ .

Vzhledem k vlastnostem vektorového součinu použijeme jako normálový vektor roviny  $\rho$  vektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, 3) \times (7, -1, 2) = (8, 0, 4).$$

(viz Obr. 40). Rovina  $\rho$  je tedy dána rovnicí ve tvaru  $8x+4z+d=0$ , kde  $d$  dopočítáme



Obrázek 40:  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (8, 0, 4)$

po dosazení souřadnic  $A$ . Z příslušné rovnice  $8 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + d = 0$  dostáváme  $d = 20$ . Odpovídající rovnici  $8x + 4z + 20 = 0$  potom můžeme ještě vydělit 4 a dostaneme základní tvar obecné rovnice roviny  $\rho: 2x + z + 5 = 0$ .

**Poznámka.** U normálového vektoru nám jde o jeho směr, nikoliv velikost. Proto jsme mohli dělit 4 již souřadnice vektoru  $\vec{u} \times \vec{v} = (8, 0, 4)$  a nadále pracovat s vektorem  $\vec{n} = (2, 0, 1)$ .

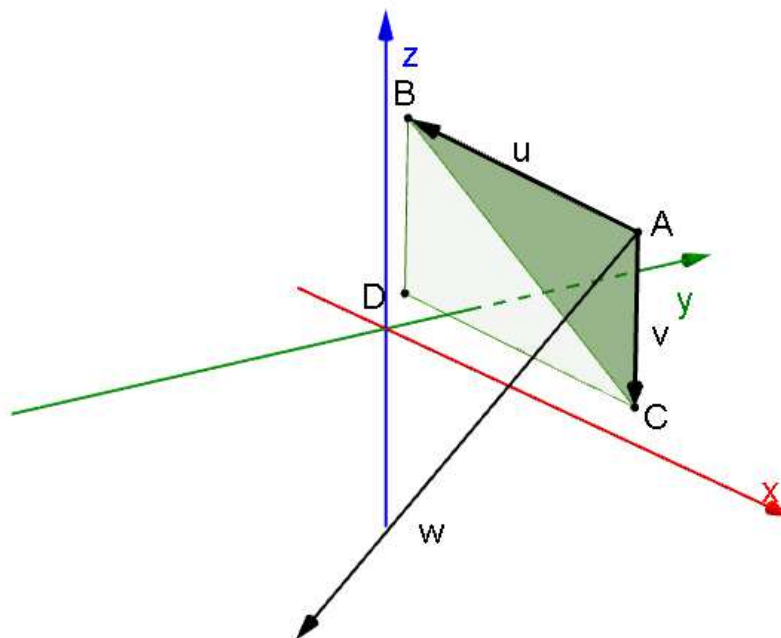
**PŘÍKLAD 9.2.** Vypočtete obsah trojúhelníku  $ABC$  s vrcholy  $A = [7, 3, 4]$ ,  $B = [1, 0, 6]$ ,  $C = [4, 5, -2]$ .

*Řešení:* Velikost (norma) vektorového součinu  $\vec{u} \times \vec{v}$  je rovna obsahu rovnoběžníku, který je vymezen vektory  $\vec{u}, \vec{v}$

$$S_{\diamond} = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Potom obsah trojúhelníku  $ABC$  spočítáme jako polovinu velikosti vektorového součinu  $\vec{u} \times \vec{v}$ , kde  $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$  (viz Obr. 41)

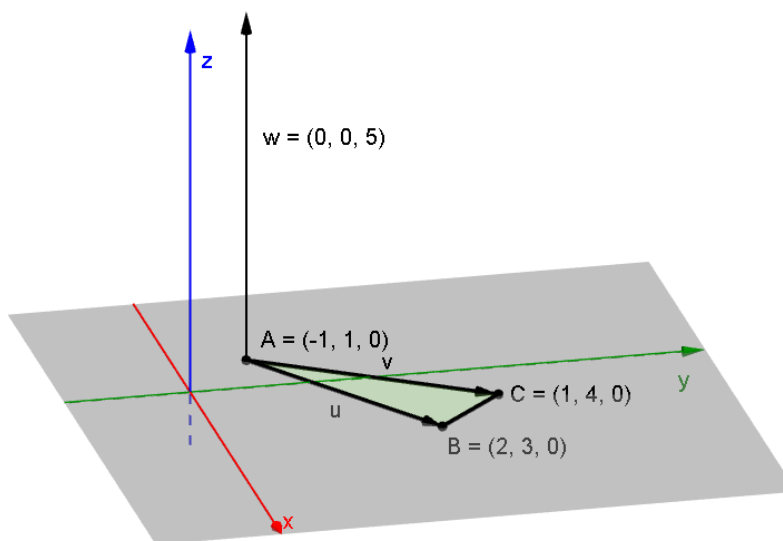
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |(-6, -3, 2) \times (-3, 2, -6)| = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = 24,5.$$



Obrázek 41: Obsah trojúhelníku  $ABC$  je roven  $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

**PŘÍKLAD 9.3.** Vypočtete obsah trojúhelníku  $ABC$ ;  $A = [-1, 1]$ ,  $B = [2, 3]$ ,  $C = [1, 4]$ .

*Řešení:* Pro řešení tohoto úkolu je nejsnazší použít *vnější součin* (též *smíšený součin*), jak uvidíme v kapitole 10. Výpočet pomocí vektorového součinu však není nijak obtížný a navíc se ukáže, že oba postupy spolu souvisejí. Rovinu, v níž se nachází



Obrázek 42: Obsah trojúhelníku  $ABC$  je roven  $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

daný trojúhelník jednoduše chápeme jako podprostor bodového prostoru dimenze 3. Tento přechod do prostoru vyšší dimenze nejjednodušeji vyřešíme tak, že rovinu  $ABC$  ztotožníme se souřadnicovou rovinou  $xy$ , tj. souřadnice daných bodů změníme z uspořádaných dvojic na trojice přidáním 0 jako třetí složky;  $A = [-1, 1, 0]$ ,  $B =$

$[2, 3, 0]$ ,  $C = [1, 4, 0]$  (viz Obr. 42). Potom k výpočtu obsahu trojúhelníku  $ABC$  použijeme vektorový součin stejně jako při řešení příkladu 9.2. Obsah trojúhelníku  $ABC$  vyjde 2,5.

## 9.4 Ortogonální doplněk $n-1$ vektorů v prostoru $V_n$

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Zobecněním vektorového součinu do prostoru  $V_n$  je *ortogonální doplněk  $n-1$  vektorů*. Tímto pojmem rozumíme *jeden vektor*, který je kolmý ke všem daným  $n-1$  vektorům z  $V_n$ . Vektorový součin bychom tedy mohli nazývat také *ortogonální doplněk 2 vektorů* v prostoru  $V_3$ .

K zobecnění vektorového součinu do prostoru dimenze  $n$  použijeme jeho zápis (123) ve formě determinantu.

**Definice 23** (Ortogonální doplněk  $n-1$  vektorů). *Ortogonálním doplňkem  $n-1$  vektorů  $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , jejichž souřadnice jsou udány vzhledem k ortonormální bázi  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  vektorového prostoru  $V_n$ , nazýváme vektor, který je výsledkem rozvoje determinantu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{vmatrix} \quad (127)$$

podle  $n$ -tého řádku. Značíme ho

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1}.$$

**Poznámka.** Podle definice 23 a podle věty o rozvoji determinantu<sup>1</sup> pro ortogonální doplněk  $n-1$  vektorů  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$  platí

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{vmatrix} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + \dots + A_n \vec{e}_n.$$

Potom ale můžeme říci, že ortogonální doplněk uvedených  $n-1$  vektorů je vektor, jehož složkami jsou algebraické doplňky prvků posledního řádku determinantu (127)

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1} = (A_1, A_2, \dots, A_n).$$

<sup>1</sup>Dle věty o rozvoji determinantu je  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , kde  $\delta_{ij}$  je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí, že  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ .



## 9.5 Vlastnosti ortogonálního doplňku $n - 1$ vektorů

Vlastnosti ortogonálního doplňku  $n - 1$  vektorů<sup>1</sup> jsou analogické vlastnostem vektorového součinu, které jsou uvedeny na straně 108.

- (1) Ortogonální doplněk  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1}$  je kolmý k vektorům  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$ .
- (2) Pro vektory  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$  lineárně nezávislé je  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1}\}$  kladnou bází  $V_n$ .
- (3) Pro vektory  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$  lineárně závislé je  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1} = \vec{o}$ .
- (4) Prohozením pořadí dvou vektorů se ortogonální doplněk  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1}$  mění na opačný.

$$(5) |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1 \vec{a}_2 & \vec{a}_1 \vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_1 \vec{a}_{n-1} \\ \vec{a}_2 \vec{a}_1 & \vec{a}_2^2 & \vec{a}_2 \vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_2 \vec{a}_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_{n-1} \vec{a}_1 & \vec{a}_{n-2} \vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1} \vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix} = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}),$$

kde  $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1})$  je Gramův determinant.

## 9.6 Cvičení: Vektorový součin

1. Vypočtete obsah trojúhelníku  $\Delta ABC$ ;  $A[-2, -3]$ ,  $B[4, -1]$ ,  $C[1, 5]$ .
2. Vypočtete obsah trojúhelníku  $\Delta KLM$ ;  $K[1, 0, -2]$ ,  $L[2, 3, 5]$ ,  $L[-3, 4, 0]$ .
3. Napište obecnou rovnici roviny  $\sigma = (KLM)$  pro  $K[1, 0, -2]$ ,  $L[2, 3, 5]$ ,  $L[-3, 4, 0]$ .
4. Určete souřadnice paty kolmice spuštěné z bodu  $P[2, 1, -3]$  do roviny  $\rho = (ABC)$  pro  $A[1, -3, 0]$ ,  $B[2, 5, 1]$ ,  $C[1, 2, 1]$ .

---

<sup>1</sup>Více o těchto vlastnostech viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf>, str. 106–111.