LINEÁRNÍ ALGEBRA A GEOMETRIE - KMA/LA2

Roman HAŠEK

15. února 2018

Obsah

1 Řešení soustav lineárních rovnic

1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ s reálnými koeficienty rozumíme rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{1}$$

kde koeficienty $a_1, a_2, ..., a_n, b$ jsou reálná čísla.
Označení „lineární“ vyjadřuje skutečnost, že každá z neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ se v rovnici vyskytuje nejvýše v první mocnině. Pokud by nejvyšší mocninou, v níž se v rovnici vyskytuje proměnná, byla mocnina druhá, resp. třetí, hovořili bychom o rovnici kvadratické, resp. kubické (případně o rovnici druhého, resp. třetího stupně).

V případě rovnic o jedné, dvou či třech neznámých používáme pro označení neznámých a koeficientů často i jiné symboly než v (1), např. neznámé označujeme x, y a z a koeficienty a, b, c a d:

$$ax = b, \qquad ax + by = c, \qquad ax + by + cz = d.$$

1.2 Soustava lineárních rovnic

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty (obecně s koeficienty z tělesa[1] T; potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\;......\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{2}$$

Se soustavou (2) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[1] „Tělesem“ zde rozumíme algebraickou strukturu (již znáte algebraickou strukturu zvanou „grupa“). V kurzu lineární algebry a geometrie budeme pracovat výhradně s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Definice této algebraické struktury je uvedena v kapitole věnované vektorovému prostoru.

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

1.3 Maticový zápis soustavy

Užitím násobení matic můžeme soustavu (2) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

kde A je matice soustavy, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy.

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{b}$ můžeme chápat také jako matice. Pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{x}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (2) jako na rovnost **lineární kombinace sloupcových vektorů matice** A vektoru $\vec{b}$:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = \vec{b}.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme dva typy soustavy lineárních rovnic (2):

1) Pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$ hovoříme o **homogenní soustavě**, symbolicky ji zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = O).$$

2) Pro $\vec{b} \neq \vec{o}$ hovoříme o **nehomogenní soustavě**, kterou symbolicky zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b};\ \vec{b} \neq \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = B;\ B \neq O).$$

1.4 Řešitelnost soustavy - Frobeniova věta

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

PŘÍKLAD 1.1. *Rozhodněte o počtu řešení daných soustav. Potom je vyřešte a jejich řešení geometricky interpretujte.*

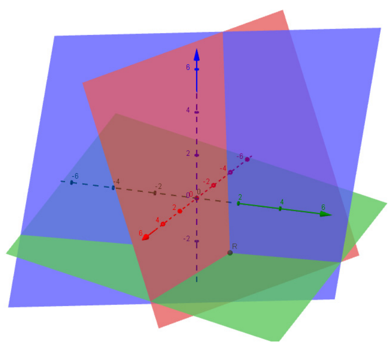
a) $$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7, \end{aligned}$$ b) $$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 1 \\ 3x + 6y + 9z &= 2, \end{aligned}$$ c) $$\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3. \end{aligned}$$

Řešení:
Provedeme Gaussovu eliminaci rozšířené matice každé z daných soustav:

ad a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= 6 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$h(A) = h(A^*) = n$ (počet neznámých), soustava má jediné řešení (je regulární)



Obrázek 1: Řešení příkladu 1.1 a - tři roviny s jedním společným bodem

Řešení určíme například Gaussovou-Jordanovou eliminací (můžeme však použít také Cramerovo pravidlo, inverzní matici či přímé řešení soustavy):

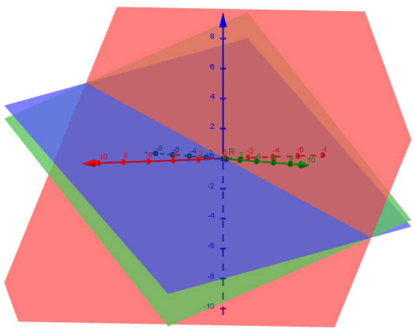
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $X = [1, 2, -2]$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako bod, který je společný třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 1.

ad b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

$h(A) = h(A^*) < n$ (počet neznámých), soustava má nekonečně mnoho řešení



Obrázek 2: Řešení příkladu 1.1 b - tři roviny se společnou přímkou

Řešení určíme ze soustavy (4), která odpovídá matici v Gaussově tvaru ekvivalentní s rozšířenou maticí dané soustavy:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

Neznámé x, y, které odpovídají prvním nenulovým prvkům každého řádku matice v Gaussově tvaru zůstanou neznámými (tzv. „základní“ neznámé), zatímco neznámou z nahradíme reálným parametrem t (nejsme schopni určit hodnoty více neznámých než je počet nezávislých rovnic, proto tuto třetí neznámou uvažujeme jako „volnou“):

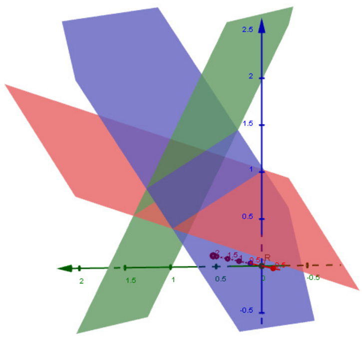
$$\begin{aligned} z &= t;\ t \in R \\ x + 3y &= 1 - 5t \\ 3y &= 1 - 6t \end{aligned}$$

Řešením soustavy je množina všech uspořádaných trojic $M = \{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]; t \in R\}$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako přímku, která je společná všem třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 2.

ad c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ y + 4z &= -1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

$h(A) < h(A^*)$, soustava nemá řešení



Obrázek 3: Řešení příkladu 1.1 c - tři roviny nemají společný průnik

Množina řešení dané soustavy je prázdná: $M = \emptyset$. Geometricky lze tento závěr interpretovat tak, že roviny odpovídající daným rovnicím nemají (všechny tři) žádný společný bod, viz Obr. 3.

Věta 1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow$ b je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Potom se jeho přidáním k matici tvořené vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ nemůže zvýšit její hodnost, tj. $h(A) = h(A^*)$. Symbolicky zapsáno: $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$.[2]

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspoň jedno řešení

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$ $\square$

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n$ ... soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou $n-$tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n$ ... soustava má nekonečně mnoho řešení (tj. nekonečně mnoho uspořádaných $n-$tic, které tvoří nějaký „podprostor“, např. přímku nebo rovinu),

(iii) $h(A) \neq h(A^*)$ ... soustava nemá řešení.

PŘÍKLAD 1.2. *Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.*

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 4x + 3y - z &= 7, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

[2] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v partiích věnovaných pojmu „Vektorový prostor“.

1.5 Vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic

Množiny řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic a k ní příslušné homogenní soustavy spolu úzce souvisí. Zajímá nás povaha tohoto vztahu, a jak ho můžeme využít při řešení nehomogenních soustav.

PŘÍKLAD 1.3. *Řešte dané dané dvojice homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic.*

a) $x + 2y = 0,$ $\qquad$ $x + 2y = 5,$

e) $-x + 2y + z = 0$, $x + y + 2z = 0,$ $\qquad$ $-x + 2y + z = 7$, $x + y + 2z = 11.$

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:
ad a)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-2t, t]; t \in R\} = \{t(-2, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - 2t, t]; t \in R\} = \{[5, 0] + t(-2, 1); t \in R\}.$$

ad b)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-t, -t, t]; t \in R\} = \{t(-1, -1, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - t, 6 - t, t]; t \in R\} = \{[5, 6, 0] + t(-1, -1, 1); t \in R\}.$$

Věta 2 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť R je libovolné řešení nehomogenní soustavy $AX = B$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $AX = O$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $AX = B$ platí:*

$$M = \{R + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Důkaz. (1) $\{R + \vec{u}\} \subseteq M; \quad A(R + \vec{u}) = AR + A\vec{u} = AR + \vec{o} = AR = B$

(2) $M \subseteq \{R+\vec{u}\}; \quad AQ = B, AR = B \Rightarrow A(Q-R) = O \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = Q-R \in W_A$ tak, že $AQ = A(R + \vec{u}) = B$. □

Poznámka. Věta 2 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení R této soustavy a všech řešení $\vec{u}$ příslušné homogenní soustavy**.

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho R.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = R + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy tvoří tzv. **bodový prostor** (tj. je to množina bodů, také můžeme říci „množina míst“), zatímco množina všech řešení příslušné homogenní soustavy tvoří tzv. **vektorový prostor** (tj. je to množina vektorů, také můžeme říci „množina směrů“).

Prvky **bodového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 14 - Def. 2.1) nazýváme body. Každý bod, který je řešením nehomogenní soustavy, se dá vyjádřit jako součet jednoho konkrétního bodu a lineární kombinace vektorů (které jsou řešením příslušné homogenní soustavy).

Prvky **vektorového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 8 - Def. 1.1) nazýváme vektory. Každý vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace skupiny vektorů z téhož prostoru, kterou nazýváme **systém (množina) generátorů** daného vektorového prostoru.

Dimenze vektorového prostoru je číslo, které udává počet lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinací mohu vytvořit každý vektor uvažovaného prostoru. Systém generátorů v.p., který je tvořen lineárně nezávislými vektory se nazývá **báze** vektorového prostoru. Dimenze je tak rovna počtu vektorů báze daného vektorového prostoru. Bod (počátek) má dimenzi 0, přímka dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor má dimenzi 3.

1.6 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu lineárních rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly (tj. všechny rovnice v soustavě jsou homogenní). Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení - tzv. „triviální řešení“, které spočívá v tom, že za všechny neznámé dosadíme nuly (triviálním řešením je tedy uspořádaná $n-$tice tvořená samými nulami, též můžeme říci nulový vektor).

Pokud je matice homogenní soustavy regulární, tj. $h(A) = n$, má soustava jenom triviální řešení.

Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení a triviální řešení je jenom jedním z nich. Tímto případem homogenní soustavy se teď budeme zabývat.

PŘÍKLAD 1.4. *Řešte homogenní soustavu*

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0
\end{array}
\tag{5}
$$

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal (tj. množinu všech lineárních kombinací) dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 3. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť matice A této soustavy má hodnost $h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

K důkazu této věty nemáme zatím vytvořeny potřebné teoretické základy. Proto se zde provizorně opřeme o své dosavadní zkušenosti a k rigoróznímu důkazu se vrátíme, až budeme připraveni.

Již víme, že k nalezení hodnot k neznámých potřebujeme k nezávislých rovnic a neznámé, které jsou nad tento počet nahrazujeme (vesměs reálnými) parametry.

Tím vyjadřujeme, že jejich hodnoty jsou v daném oboru volné, hovoříme o *volných* neznámých. Počet parametrů pak určuje *dimenzi* prostoru řešení soustavy. A jak pro tuto dimenzi dostaneme vyjádření $n - h(A)$? Je-li hodnost matice (homogenní) soustavy A rovna $h(A)$, víme, že nezávislých rovnic soustavy je $h(A)$. Můžeme tedy určit hodnoty $h(A)$ neznámých. Z celkového počtu n ($n \geq h(A)$) tak zbývá právě $n - h(A)$ volných neznámých, které nahradím parametry a jejichž počet určuje dimenzi prostou řešení. Pokud například je $h(A) = n$, nemám žádnou volnou neznámou, řešením je jediná konkrétní uspořádaná $n-$tice, tj. bod, a dimenze prostoru řešení je $n - h(A) = 0$.

1.6.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 1.4. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \, .$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 1.4:

1. Určíme tzv. základní neznámé
Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Soustava odpovídající výsledné matici v Gaussově tvaru má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 = 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 = 0. \end{array} \tag{6}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé ("nezákladní" nebo též "volné" neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{základní nezn.}: \quad x_1, x_2; \qquad \text{volné nezn.}: \quad x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (6) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (1.4) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 1.5. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{7}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2, 1, 0, 0, 0), (3, 0, 5, 1, 0), (7, 0, 12, 0, 1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2, 1, 0, 0, 0) + s(3, 0, 5, 1, 0) + t(7, 0, 12, 0, 1); \quad r, s, t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Poznámka. Z tvrzení věty 3 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

1.7 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Již víme, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní (viz Věta 2). Pokračujeme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (7) z příkladu 1.5.

PŘÍKLAD 1.6. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \tag{9}$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (8) příslušné **homogenní** soustavy (7):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$

Cvičení:
Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy. Pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustav.

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}]\}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[1-2t, -1+t, t]\}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ x - 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1, -2, 1]\}$$

(e)
$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - w &= 3 \\ 3x + y + 6z + 11w &= 16 \\ 2x - y + 4z + w &= 9 \end{aligned}$$
$$\{[5-2t, 1, t, 0]\}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1, 0, 1]\}$$

(g)
$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$
$$\{[1+3s-2t, s, t]\}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$
$$\{[-\frac{15}{2}, 23, -10]\}$$

(i)
$$x + 2y = 0$$
$$\{[-2t, t]\}$$

(j)
$$x + 2y = 3$$
$$\{[3 - 2t, t]\}$$

(k)
$$x - 3y + 2z = 0$$
$$\{[3s - 2t, s, t]\}$$

(l)
$$x - 3y + 2z = 3$$
$$\{[3 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(m)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
$$\{[-t, -t, t]\}$$

(n)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$
$$\{[\frac{17}{3} - t, \frac{19}{3} - t, t]\}$$

(o)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(p)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

$$\text{(a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right], \quad \text{(b)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right], \quad \text{(c)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right],$$

$$\text{(d)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array}\right], \text{(e)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \text{(f)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array}\right],$$

(g) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$, (h) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array}\right]$, (i) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right]$,

(j) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$.

ŘEŠENÍ: (a) $\{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]\}$, (b) $\{[-7 - 2t, t, 2]\}$, (c) $\{[-8, 4 + t, 8 + 2t, 1 + t]\}$, (d) $\{[-3 - 11t, -1 - t, 4 + 7t]\}$, (e) $\{[2 - 2s - 5t, s, 1 + t, 2t]\}$, (f) $\{[2t, -8 + 3t, t, 3]\}$, (g) $\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$, (h) $\{[-5 - 3t, 19 - 4t, -6 - 2t, t]\}$, (i) $\emptyset$, (j) $\{[-1, -2, 0]\}$.

3. Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:

a) $$\begin{aligned} \alpha &: 3x + y - z - 7 = 0 \\ \beta &: x + 2y - 5z - 15 = 0 \\ \gamma &: 3x + 5y + 2z - 9 = 0, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \alpha &: x + y + z - 5 = 0 \\ \beta &: 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ \gamma &: 4x - y + 2z - 10 = 0, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \alpha &: x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 3x - z - 6 = 0 \\ \gamma &: 7x - 4y - 5z - 16 = 0, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \alpha &: x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 2x - 4y + 2z - 2 = 0 \\ \gamma &: -5x + 10y - 5z + 5 = 0. \end{aligned}$$

4. Řešte dané soustavy lineárních rovnic:

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: (a) $[-1,-1,0,1]$; (b) $[1,2,1,-1]$; (c) $[1,2,3]$; (d) $[-2,2,-3,3]$; (e) $\emptyset$; (f) $[4-t,\frac{2}{3},t,-2t-\frac{7}{3}]$; (g) $[-\frac{1017}{175}+2t,-\frac{283}{175}+t,t,-\frac{8}{175}]$; (h) $[1,1,1,1]$; (i) $[1,-1,0,2]$; (j) $[2,0,-2,-2,1]$

5. U každé z daných soustav nejprve užitím Frobeniovy věty rozhodněte o její řešitelnosti, potom, jde-li to, ji vyřešte.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 24x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 3x_5 &= 3, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2, \\ 2x + y &= 1, \\ x + 2y + z &= -3, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 4x_1 + 11x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 7, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= -2, \\ x_2 + 3x_3 + x_5 + 5x_6 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 4x_6 &= 1. \end{aligned}$$

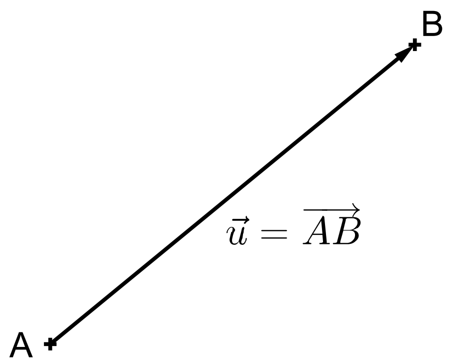
ŘEŠENÍ: viz `https://www.geogebra.org/m/CBD9Ts5Y`

2 Vektorový prostor

Pojem „vektor“ znáte ze střední školy - z fyziky, kde jste ho používali pro znázornění velikosti a směru vektorové veličiny (tzv. „fyzikální vektor“), a z geometrie, kde jste vektor používali k vyjádření směru (a velikosti posunutí v tomto směru) např. při zápisu parametrických rovnic přímky (tzv. „geometrický vektor“).

Vektory jste znázorňovali „orientovanými úsečkami“ (šipkami) konkrétního směru a velikosti. Ve fyzice většinou záleží na umístění počátečního bodu této orientované úsečky, jedná se o tzv. „vázané vektory“. V geometrii většinou na umístění počátečního bodu nezáleží (všechny orientované úsečky téhož směru a téže velikosti jsou rovnocenné), hovoříme o tzv. „volných vektorech“.

Geometrickým vektorem tak vlastně rozumíme *množinu všech orientovaných úseček stejného směru a velikosti.* Konkrétní orientovanou úsečku z této množiny pak nazýváme *umístěním vektoru.* Tohoto vztahu mezi dvojicí bodů (tj. počátečním a



Obrázek 4: Geometrický vektor $\vec{u}$, jehož umístěním je orientovaná úsečka AB

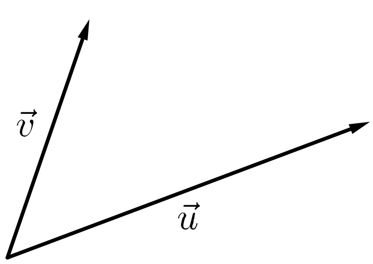
koncovým bodem orientované úsečky) a vektorem budeme dále využívat. Například vektor $\vec{u}$ na Obr. 4, který je dán orientovanou úsečkou (svým umístěním) AB, budeme zapisovat také jako $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ nebo $\vec{u} = B - A$.

PŘÍKLAD 2.1. *Pro geometrické vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, které jsou dány svými umístěními určete graficky výsledky následujících operací:*

a) $\vec{u} + \vec{v}$,

b) $\vec{u} - \vec{v}$,

c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$.



2.1 Vybrané algebraické struktury

Vlastnosti početní operace (např. sčítání, odčítání, násobení a dělení) prováděné s nějakými čísly závisí na množině, z níž tato čísla pocházejí. Liší se vlastnosti operace sčítání na množině přirozených čísel a na množině celých čísel, liší se vlastnosti dělení na množině celých čísel a na množině racionálních čísel apod. Má proto smysl hovořit o operaci ve spojení s množinou, na jejíž prvcích operaci provádíme.

Algebraickou strukturou rozumíme množinu spolu s jednou nebo i více operacemi, které jsou na ní (neomezeně) definované. Zapisujeme $(M, *)$ nebo $(K, \diamond, \circ)$, kde M, K jsou množiny a $*, \diamond, \circ$ jsou operace na nich definované ($*$ je operace na M a $\diamond$ spolu s $\circ$ jsou operacemi na K).

Příklady algebraických struktur

1. Množina celých čísel (Z) spolu s operací sčítání „+“: $(Z, +)$.
2. Množina reálných čísel (R) spolu s operacemi sčítání „+“ a násobení „·“: $(R, +, \cdot)$.
3. Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic (konkrétního) $n-$tého řádu spolu s operací násobení matic „·“: $(M_{n\times n}, \cdot)$.
4. Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operacemi sčítání „$\oplus$“ a násobení „$\otimes$“ na hodinovém ciferníku: $(M, \oplus, \otimes)$.

2.1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa)**.** *Grupou $(M, *)$ rozumíme množinu M spolu s operací $*$ na M, která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall\, x, y \in M;\ \ x * y \in M,$
Operace $*$ je neomezeně definovaná na M.
(Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $*$.)

ii) $\forall\, x, y, z \in M;\ \ x * (y * z) = (x * y) * z,$
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists\, e \in M, \forall\, x \in M;\ \ x * e = e * x = x,$
Existuje neutrální prvek vzhledem k $*$.
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)

iv) $\forall\, x \in M, \exists y \in M;\ \ x * y = y * x = e.$
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $*$.
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)

Je-li struktura $(M, *)$ navíc **komutativní***, nazývá se* **komutativní grupa** *nebo též* **Abelova grupa**.

PŘÍKLAD 2.2. *Rozhodněte, zda algebraická struktura* $(Z, +)$ *je „komutativní grupou".*

Příklady grup

1. $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$, $(C, +)$,
2. $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

$\circ$	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

PŘÍKLAD 2.3. *Rozhodněte, zda množina geometrických vektorů v rovině spolu s operací skládání (sčítání) vektorů tvoří grupu.*

2.1.2 Těleso

PŘÍKLAD 2.4. *Určete vlastnosti algebraické struktury* $(R, +, \cdot)$.

Těleso je algebraickou strukturou, jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura* $(T, +, \cdot)$ *se nazývá* **těleso**, *právě když je* $(+, \cdot)$*-distributivní, když struktura* $(T, +)$ *je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura* $(T - \{0\}, \cdot)$, *kde* 0 *je nulový prvek grupy* $(T, +)$, *je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa* T*). Je-li navíc grupa* $(T - \{0\}, \cdot)$ *komutativní, nazývá se* T **komutativní těleso**.

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

2.2 Vektorový prostor

Příklad: Množina všech vektorů v rovině (v prostoru), jak je známe ze středoškolské geometrie (geometrické vektory).

Definice 3 (Vektorový prostor)**.** *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme* **vektorovým prostorem nad tělesem** T, *právě když jsou na V definovány dvě operace:*

i) **sčítání:** *libovolné dvojici $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$,*

ii) **násobení prvkem z tělesa T (skalárem):** *výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$,*

které splňují následující vlastnosti:

a) *Struktura $(V, +)$ je* **komutativní grupa**.

b) **Distributivnost***:*

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u},$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

c) *Existence* **jednotkového prvku skalárního násobení***:*

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

Poznámky.
1. Prvky množiny V nazýváme **vektory**.
2. Vektor $\vec{o}$, tj. nulový prvek grupy $(V, +)$, nazýváme **nulový vektor**.
3. Vektor $-\vec{u}$ nazýváme **opačný vektor k vektoru** $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}.$$

4. Prvky tělesa T se nazývají **skaláry**.

PŘÍKLAD 2.5. *Ukažte, že množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem, definovanými následujícím způsobem, je vektorový prostor:*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

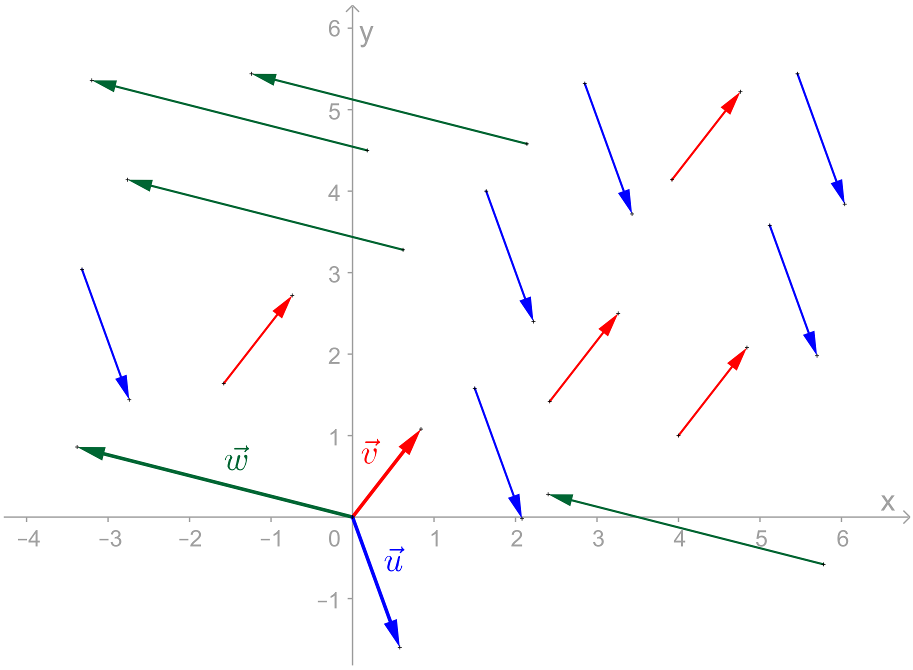
$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

Poznámky.
1. Jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel.
2. Tento prostor můžeme reprezentovat prostřednictvím bodů v rovině, kterou opatříme soustavou souřadnic.

PŘÍKLAD 2.6. *Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:*

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

PŘÍKLAD 2.7. *Ukažte, že geometrické vektory v rovině tvoří vektorový prostor.*[1]



Obrázek 5: Vektor jako množina orientovaných úseček stejné velikosti a stejného směru. Orientovaná úsečka jako umístění vektoru.

Poznámka. U geometrických vektorů nás zajímá pouze jejich velikost a směr, nikoliv jejich působiště, jsou to tzv. volné vektory, viz Obr. 5. Proto je můžeme při zachování jejich směru a působiště libovolně přemisťovat. Vektorový prostor si tak můžeme představovat jako množinu všech vektorů se společným počátečním bodem (který většinou volíme v počátku soustavy souřadnic).

Některé důsledky definice vektorového prostoru

a) $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$,

b) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$,

c) $c \cdot \vec{o} = \vec{o}$,

d) $c \cdot \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow c = 0 \vee \vec{v} = \vec{o}$.

[1]Geometrickým vektorem rozumíme množinu všech orientovaných úseček stejného směru a stejné velikosti, viz skupiny barevných orientovaných úseček na Obr. 5. Konkrétní orientovanou úsečku z této množiny, se kterou pracujeme, potom nazýváme *umístění vektoru*.

Příklady vektorových prostorů

1. Vektory v rovině a v prostoru z elementární geometrie.

2. Samotné těleso T spolu s operacemi „$+, \cdot$" definovanými na T tvoří vektorový prostor nad tělesem T.

3. Aritmetický vektorový prostor R^2 nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:
$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

4. Aritmetický vektorový prostor R^3 nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných trojic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:
$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

5. Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:
$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$
$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

6. Prostor F_X všech reálných (komplexních) funkcí na nějaké množině X (nad tělesem $\mathbb{R}$).

7. Množina $C_{\langle a,b \rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

8. Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Poznámka. Vektorový prostor V nad tělesem T někdy značíme takto:
$$(V, +, T).$$

PŘÍKLAD 2.8. *Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.*

2.3 Cvičení

Vektorové prostory

1. Ukažte, že následující množiny jsou vektorovými prostory:

a) Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

b) Množina $F_{\langle a,b \rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

c) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

d) Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.

2. Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

3. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou roviny v $\mathbb{R}^3$ definované rovnicemi $3x + 2y - 5z = 0$, resp. $3x + 2y - 5z = 1$. Ukažte, že ρ_1 je vektorovým prostorem, zatímco ρ_2 nikoliv.

4. Ukažte, že $\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ je vektorovým prostorem dimenze 3. Najděte bázi tohoto prostoru.

Algebraické struktury

5. Rozhodněte o vlastnostech následujících algebraických struktur (tj. zda se jedná o grupy či tělesa):

a) Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic $n-$tého řádu spolu s operací sčítání matic „+“.

b) Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic $n-$tého řádu spolu s operací násobení matic „·“.

c) Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operací sčítání $\oplus$ na hodinovém ciferníku.

d) Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operací násobení „$\otimes$“ na hodinovém ciferníku.

e) Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operacemi sčítání „$\oplus$“ a násobení „$\otimes$“ na hodinovém ciferníku.

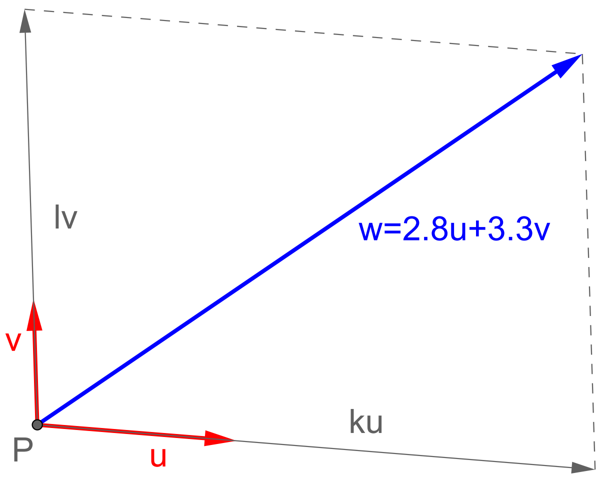
f) Množina $K = \{1, i, -1, -i\}$ (i je imaginární jednotka) spolu s operací „·“ násobení.

g) Množina zákrytových pohybů čtverce (rovnostranného trojúhelníku) v rovině spolu s operací skládání.

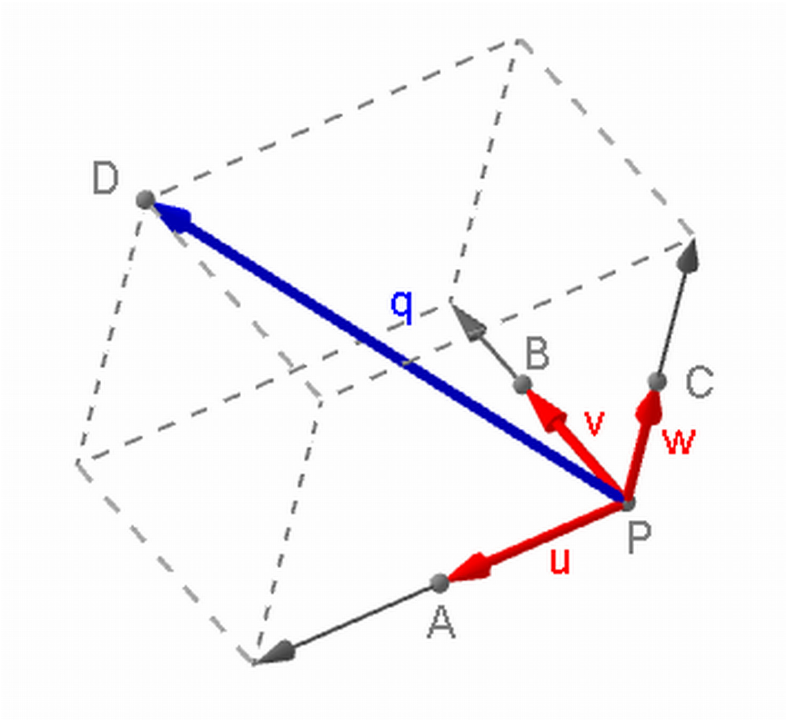
h) Množina celých čísel Z spolu s operacemi sčítání „+“ a násobení „·“.

i) Množina zńamének $Z = \{+, -\}$ spolu s operací „skládání znamének“ ·.

3 Lineární kombinace vektorů. Lineární závislost a nezávislost vektorů.



Obrázek 6: Vektor $\vec{w}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou lineárně závislé.



Obrázek 7: Vektor $\vec{q}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ a $\vec{q}$ jsou lineárně závislé.

3.1 Lineární kombinace vektorů

Definice 4. *Nechť $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ jsou prvky vektorového prostoru V nad tělesem T. Řekneme, že vektor $\vec{u}$ je* **lineární kombinací vektorů** *$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$, právě když existují prvky $a_1, a_2, ..., a_n \in T$ tak, že platí:*

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i.$$

Prvky $a_1, a_2, ..., a_n$ nazýváme **koeficienty** *lineární kombinace.*
Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace **triviální**, *jinak se nazývá* **netriviální**.

PŘÍKLAD 3.1. *Ověřte, zda vektor $\vec{u} = (4, -1, 3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.*

PŘÍKLAD 3.2. *Ověřte, zda vektor $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.*

PŘÍKLAD 3.3. *Vymyslete nejméně tři vektory o stejném počtu prvků a vytvořte jejich tři různé lineární kombinace.*

3.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

PŘÍKLAD 3.4. *Množina $M = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1), (1,2,3)\}$ je tvořena čtyřmi vektory z vektorového prostoru R^3. Rozhodněte, zda je některý z těchto vektorů lineární kombinací ostatních.*

Řešení: Označme dané vektory: $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ a $\vec{v}_4 = (1, 2, 3)$. Potom platí $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{o}$ (V tomto případě se to dá „uvidět“, jinak řešíme příslušnou homogenní soustavu.). Je tedy zřejmé, že každý z daných vektorů se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch zbývajících, například $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Ale pozor! Jak vidíme v následujícím příkladě, ne vždy tomu tak je.

PŘÍKLAD 3.5. *Jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ a $\vec{v}_4 = (0, 2, 1)$. Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících.*

Řešení: Poučeni předcházejícím příkladem se ptáme, zda existují takové koeficienty $k, l, m, n \in R$, pro které platí $k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 + n\vec{v}_4 = \vec{o}$. Po dosazení souřadnic vektorů můžeme psát

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Po vynásobení a sečtení na levé straně obě strany rovnosti (10) porovnáme. To vede k homogenní soustavě lineárních rovnic s maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad \begin{aligned} k &= 0 \\ l + 2n &= 0 \\ m - n &= 0 \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $n = t;\ t \in R$, pro zbývající neznámé platí $k = 0, l = -2t, m = t$, tj. množinou řešení homogenní soustavy je $W = \{(0, -2t, t, t); t \in R\}$. Pro naše účely stačí použít jedno konkrétní řešení. Např. pro $t = 1$ dostáváme řešení $(0, -2, 1, 1)$ a příslušná lineární kombinace má tvar

$$0\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{o}.$$

Z této rovnosti je zřejmé, že každý z vektorů $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících, např. $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_4$. Pro vektor $\vec{v}_1$ to však neplatí! Ten kvůli jeho nulovému koeficientu nemůžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Zobrazte si dané čtyři vektory v GeoGebře a pokuste se odhalit, jak jejich geometrická konfigurace souvisí s řešením příkladu.

PŘÍKLAD 3.6. *Jsou dány vektory* $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 1)$, $\vec{c} = (1, 0, 2)$ *a* $\vec{d} = (2, -1, -1)$. *Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících. Zobrazte si vektory v GeoGebře.*

Definice 5 (Lineární závislost a nezávislost vektorů)**.** *Vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ *z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T *se nazývají:*
a) *vektory* **lineárně nezávislé***, právě když je pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\forall\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge ... \wedge a_n = 0).$$

b) *vektory* **lineárně závislé***, právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka. Jak je to pro $n = 1$, tj. je jeden vektor lineárně závislý nebo nezávislý? Vektor $\vec{u}$ je **lineárně nezávislý**, právě když je $\vec{u} \neq \vec{o}$.

PŘÍKLAD 3.7. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů:*
a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{v}_2 = (-2, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (4, -1, 3)$.
b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{u}_2 = (-2, 1, 1),\ \vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$.

Věta 4 (Alternativní definice lineární závislosti)**.** *Vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$, *kde* $k > 1$, *z vektorového prostoru* V *nad* T *jsou* **lineárně závislé** *právě tehdy, když* **aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních**.

Poznámka. Je dobré si uvědomit, že ve větě není vůbec specifikováno, zda se jedná o kombinaci **triviální** či **netriviální**.

Důsledek 1. *Je-li jeden z vektorů nulový, jsou vektory lineárně závislé.*

Důsledek 2. *Jsou-li aspoň dva vektory stejné, jsou vektory* $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \ldots,\ \vec{u}_n$ *závislé.*

PŘÍKLAD 3.8. *Analogicky s větou 4 vyslovte „alternativní definici lineární nezávislosti“ k vektorů.*

Věta 5. *Jsou-li vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ $(k > 1)$ *z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T *lineárně nezávislé, dostaneme vynecháním kteréhokoliv z nich opět lineárně nezávislé vektory.*

Důsledek 3. *Jsou-li vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *z vektorového prostoru* V *nad* T *lineárně závislé, jsou závislé i vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$, *kde* $\vec{u}_{k+1}$ *je libovolný vektor z* V.

PŘÍKLAD 3.9. *Jsou dány dva lineárně nezávislé vektory* $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$. *Dokažte, že každý vektor* $\vec{u} \in V_2$ *lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

Řešení: Označme souřadnice vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{u} = (u_1, u_2)$. Potom se ptáme, zda existují taková $k, l \in R$, pro která je $\vec{u} = k\vec{a} + l\vec{b}$. Po rozepsání této vektorové rovnice pro jednotlivé souřadnice dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých k, l :

$$a_1k + b_1l = u_1$$
$$a_2k + b_2l = u_2$$

Tato soustava je pro lineárně nezávislé vektory $\vec{a}, \vec{b}$ regulární (proč?). Můžeme ji tak řešit třeba užitím Cramerova pravidla. Dostaneme: $k = \dfrac{u_1b_2 - b_1u_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, l = \dfrac{a_1u_2 - u_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$.
Koeficienty k, l jsou tedy pro dané vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{u}$ určeny jednoznačně.

PŘÍKLAD 3.10. *Jaký je maximální počet lineárně nezávislých vektorů v prostoru* V_2 (V_3)*?*

3.3 Lineární obal množiny vektorů

PŘÍKLAD 3.11. *Uvažujte vektor* $\vec{w} = k\vec{u}+l\vec{v}$ *z obrázku 6. Charakterizujte množinu všech těchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů* $k, l \in R$.

PŘÍKLAD 3.12. *Uvažujte vektor* $\vec{q} = k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w}$ *z obrázku 7. Charakterizujte množinu všech těchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů* $k, l, m \in R$.

PŘÍKLAD 3.13. *Uvažujte následující množinu vektorů* M *a pokuste se charakterizovat množinu všech jejich lineárních kombinací:*
a) $M = \{(0,0)\}$,
b) $M = \{(1,2)\}$,
c) $M = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$,

Definice 6. *Nechť* $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ *je podmnožina vektorového prostoru* V *(tj. je to množina obsahující* k *vektorů o stejném počtu složek).* **Lineárním obalem** *množiny* M *rozumíme* **množinu všech lineárních kombinací** *vektorů* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$*. Lineární obal množiny* M *značíme* $[M]$ *a platí, že* $[M] \subseteq V$.

Poznámka. Lineární obal množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ značíme $[M]$ nebo také $[\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}]$.

PŘÍKLAD 3.14. *Uvažujme množinu* $M = \{(2,-3,0),(1,0,3)\}$*. Potom lineárním obalem* $[M]$ *množiny* M *je množina všech vektorů* $\vec{v}$*, které se dají zapsat ve tvaru* $\vec{v} = a(2,-3,0) + b(1,0,3)$*, kde* $a, b \in R$.
(Znázornění v GeoGebře: tube.geogebra.org/student/mwxVwhw9W)

PŘÍKLAD 3.15. *Uvažujte množinu vektorů* $M = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$*. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří její lineární obal (znázorněte si ho v GeoGebře). Podle definice 3 ověřte, zda to není vektorový prostor. Jaký je vztah* $[M]$ *k aritmetickému vektorovému prostoru* R^3*?*

Řešení: Lineárním obalem dané množiny vektorů je, stejně jako v příkladu 3.14, rovina procházející počátkem soustavy souřadnic (tj. bodem $(0,0,0)$) rovnoběžně se směry určenými vektory z množiny M. Ověřením jednotlivých vlastností uvedených ve definici 3 zjistíme, že se jedná o **vektorový prostor**. Přesněji hovoříme o **vektorovém podprostoru** vektorového prostoru R^3.

Poznámka. Každý lineární obal je vektorovým prostorem (Zdůvodněte!).

Definice 7. *Nechť* $[M] = V$*, kde* V *je vektorový prostor. Množina* M *se potom nazývá* **množinou (systémem) generátorů** *vektorového prostoru* V*. Říkáme, že množina* M *generuje vektorový prostor* V*.*

PŘÍKLAD 3.16. *Najděte množiny generátorů pro následující vektorové prostory (Pokuste se najít množiny generátorů o nejmenším počtu vektorů):*
a) Množina všech vektorů (šipek) v rovině a v třírozměrném prostoru.
b) Aritmetický vektorový prostor R^2.
c) Aritmetický vektorový prostor R^1.
d) Aritmetický vektorový prostor R^3.
e) Množina P_n *všech polynomů stupně nejvýše* n *s koeficienty z* R.

PŘÍKLAD 3.17. *Rozhodněte,* **zda platí** *uvedená tvrzení o lineárním obalu množiny* M :
1. $M = \{[2,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
2. $M = \{[2,1],[1,3]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
3. $M = \{[2,1],[4,2]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
4. $M = \{[1,2],[3,4],[1,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
5. $M = \{f(x) = 3\},\ V = \{f(x) = c; c \in R\}$ *potom* $[M] = V$,
6. $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[-2,0,-1]\}$ *potom* $[M] = R^3$,
7. $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[8,-1,5]\}$ *potom* $[M] = R^3$.

3.4 Cvičení - Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů

1. Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{b} = (1, 1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, -2, -6)$. Vypočítejte:

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$,

b) $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$,

c) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

2. Zjistěte, která dvojice čísel c_1, c_2 splňuje vztah

a) $c_1(-3, 4) + c_2(1, 2) = (0, 0)$;

b) $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{o}$, jestliže $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-6, 3)$, $\vec{o} = (0, 0)$.

3. Zjistěte, při které hodnotě c je vektor $\vec{b} = (7, -2, c)$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\vec{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\vec{a}_3 = (1, -6, 1)$.

4. Zjistěte, který z vektorů $\vec{a}_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 5, 5, 1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

5. Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $q_1(x) = x + 1$, $q_2(x) = x - 1$, $q_3(x) = (x + 1)^2$, $q_4(x) = (x + 1)^3$, která je rovna polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$.

6. Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $a_1(x) = 1 - 3x + 2x^2$, $a_2(x) = 1 + x + 4x^2$, $a_3(x) = 1 + 7x^2$, která je rovna polynomu $b(x) = 3 - 2x + x^2$.

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.

a) $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (6, 3, 4)$, $\vec{c} = (5, -2, 3)$,

b) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$, $\vec{c} = (-5, -1, 9)$.

d) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$,

e) $\vec{a} = (3, -8, 1)$, $\vec{b} = (-6, 16, -2)$,

f) $\vec{a} = (3, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$,

g) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (5, 4, 2)$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 1, 1)$,

i) $\vec{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\vec{d} = (1, 0, 3, 0)$.

8. Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé i tyto vektory:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad 3\vec{u} + \vec{v}.$$

9. Nechť $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou tyto vektory lineárně nezávislé:

$$2\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + 3\vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

10. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x.$$

11. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x,\ p_4(x) = x^2 - 1.$$

12. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) množiny funkcí:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x.$$

13. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$f_1(x) = x^2 - 3,\ f_2(x) = 2 - x,\ f_3(x) = (x - 1)^2.$$

14. Rozhodněte, zda jsou dané funkce lineárně závislé či nezávislé:

a) $2 - x^2,\ 3x,\ x^2 + x - 2,$
b) $3x - 1,\ x(2x + 1),\ x(x - 1),$
c) $e^x,\ e^{x+1},$
d) $\sin x,\ \sin(x + 1),$
e) $e^x,\ e^{x+1},\ e^{x+2},$
f) $\sin x,\ \sin(x + 1),\ \sin(x + 2),$
g) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
h) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x},$

15. Nechť vektory $\mathbf{u} = \cos^2 x$, $\mathbf{v} = \sin^2 x$ tvoří bázi vektorového prostoru V. Zjistěte, který z uvedených vektorů leží ve V:

a) $2,$
b) $\sin 2x,$
c) $0,$
d) $\cos 2x,$
e) $2 + 3x,$
f) $3 - 4\cos 2x.$

4 Báze vektorového prostoru

Definice 8. *Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá* **báze vektorového prostoru** V, *právě když:*

1. $[M] = V$ *(tj. M je množinou generátorů prostoru V),*

2. *M je* **lineárně nezávislá** *množina.*

Věta 6. *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát* **právě jedním způsobem** *jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj.*

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in M, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in T;\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i.$$

Důkaz. Větu 6 dokážeme sporem. Předpokládáme, že platí její negace, tj., že každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát **aspoň dvěma různými způsoby** jako lineární kombinaci vektorů báze M, a pokusíme se z ní odvodit sporné tvrzení. Pro zjednodušení zápisu se omezíme na prostor V_3, zobecnnění na V_n bude potom zřejmé. Pro každý vektor $\vec{u}$ tedy existují aspoň dvě různé trojice koeficientů a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 takové, že

$$\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 \quad \text{a zároveň} \quad \vec{u} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3.$$

Pokud od sebe tyto dvě rovnosti odečteme, dostaneme

$$(b_1 - a_1)\vec{u}_1 + (b_2 - a_2)\vec{u}_2 + (b_3 - a_3)\vec{u}_3 = \vec{o}. \tag{11}$$

Dle předpokladu jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé. Jediná jejich lineární kombinace, která může být rovna nulovému vektoru je tak triviální lineární kombinace. Rovnost (11) je potom splněna právě tehdy, když jsou všechny tři koeficienty $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ rovny nule. To může ale nastat jedině tehdy, když $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ a $b_3 = a_3$. Tím dostáváme spor s předpokladem, že trojice a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 jsou různé. □

Věta 7 (Alternativní definice lineární nezávislosti)**.** *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru V. Pak M je* **lineárně nezávislá** *právě tehdy, když žádný z vektorů množiny M není lineární kombinací ostatních vektorů M.*

4.1 Dimenze vektorového prostoru

Definice 9. *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má* **konečnou dimenzi**, *jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V (tj. V je konečně generovaný).* **Dimenzí** *vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Značíme*

$$\dim V = n \qquad \text{nebo} \qquad V_n.$$

Například informaci o tom, že vektorový prostor V má dimenzi 3 zapíšeme ve tvaru rovnosti: $\dim V = 3$, nebo zkráceně pomocí dolního indexu: V_3.

Věta 8. *[O existenci báze] Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor má* **aspoň jednu konečnou bázi**.

Důsledek 4. *Odstraníme-li ze systému generátorů vektorového prostoru V vektor, který je lineární kombinací ostatních, pak množina zbývajících vektorů je opět systémem generátorů vektorového prostoru V.*

PŘÍKLAD 4.1. *Rozhodněte, zda je daná množina vektorů systémem generátorů, nebo přímo bází, vektorového prostoru R^3.*

a) $(1,2,3),(1,2,1),(-1,1,0),(2,-1,0)$,

b) $(1,2,3),(1,2,1),(0,0,2),(1,2,-1)$.

Řešení: Na první pohled je zřejmé, že ani jedna z uvedených množin není bází. Maximální počet nazávislých uspořádaných trojic reálných čísel je 3. Je-li jich více, jsou vždycky závislé (Souvisí to s počtem řešení příslušné homogenní soustavy rovnic. Zdůvodněte!). Zbývá vyšetřit, zda se jedná alespoň o systémy generátorů prostoru R^3. Zkoumáme proto, zda lze každý vektor $\vec{v} \in R^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci daných čtyř vektorů.

ad a)

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Rovnice (12) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & -1 & 2 & v_1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & v_2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & v_3 \end{array}\right]$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & -1 & 2 & v_1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & v_2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & v_3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & v_1 \\ 0 & 2 & -3 & 6 & 3v_1 - v_3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -2v_1 + v_2 \end{array}\right].$$

Má-li mít příslušná soustava lineárních rovnic řešení (jedno mít nemůže, tak je ve hře nekonečně mnoho řešení) nezávisle na volbě vektoru $\vec{v}$, musí mít matice soustavy dle Frobeniovy věty hodnost 3 (tj. rovnu dimenzi vektorového prostoru R^3, jehož mají být vektory systémem generátorů). Tato podmínka je evidentně splněna. Můžeme tedy říci, že daná množina vektorů je systémem generátorů vektorového prostoru R^3.

ad b)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Rovnice (13) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & v_2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & v_3 \end{array}\right]$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & v_2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & v_3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{crcr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -3v_1 + v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2v_1 + v_2 \end{array}\right].$$

Matice příslušné soustavy lineárních rovnic má hodnost 2. Rozšířená matice soustavy má až na případ, kdy $v_2 = 2v_1$, hodnost 3. Dle Frobeniovy věty tedy příslušná soustava nemá pro všechny vektory $\vec{v} \in R^3$ řešení. Daná množina vektorů není systémem generátorů vektorového prostoru R^3 (Můžeme si ale položit otázku, zda není systémem generátorů nějakého podprostoru R^3? Je-li, tak jakého?).

Poznámka. Příklad 4.1 můžeme řešit i rychleji, pouze s využitím matic, jejichž sloupce (nebo řádky) jsou dané vektory. Navrhněte a zdůvodněte postup takového řešení.

4.2 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Dle věty 6 lze vektor $\vec{u} \in V$ psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ vektorového prostoru V. Jinak řečeno, koeficienty $x_1, x_2, ..., x_n \in T$ lineární kombinace

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

jsou pro daný vektor $\vec{u}$ a danou bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ určeny jednoznačně. Tyto koeficienty, respektive jejich vektor, nazýváme souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M.

Definice 10. *Nechť* $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je báze vektorového prostoru* V. *Potom každý vektor* $\vec{u} \in V$ *lze napsat jednoznačně ve tvaru*

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ *nazveme souřadnicemi vektoru* $\vec{u}$ *vzhledem k bázi* M *a značíme*

$$\{\vec{u}\}_M = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

PŘÍKLAD 4.2. *Množina* $M = \{(1,1),(2,3)\}$ *je bází vektorového prostoru* R^2. *Potom pro vektor* $\vec{u} = (7,12) \in R^2$ *platí*

$$\vec{u} = -3(1,1) + 5(2,3).$$

Tedy souřadnice vektoru $\vec{u} = (7,12)$ *vzhledem k bázi* M *jsou* $(-3,5)$. *Píšeme takto:*

$$\{\vec{u}\}_M = (-3,5).$$

Poznámka: Nabízí se otázka, vzhledem k jaké bázi jsou uvažovány ostatní souřadnice vektorů z uvedeného příkladu. Jedná se o tzv. **kanonickou bázi**.

V případě vektorového prostoru R^2 je kanonickou bází množina

$$\{(1,0),(0,1)\}.$$

Pro R^3 je potom kanonickou bází množina vektorů

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

atd.

ÚKOL: Ověřte, že vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru R^4. Potom určete souřadnice vektoru

$$\vec{x} = (4,-2,1,5)^T$$

vzhledem k této bázi.

Poznámka: Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k dané bázi je příkladem **izomorfismu**, tj. lineárního zobrazení, které je vzájemně jednoznačné.

Věta 9. *Nechť M je báze vektorového prostoru V. Potom zobrazení*

$$f : V \mapsto T^n$$

definované vztahem

$$f(\vec{u}) = \{\vec{u}\}_M$$

je **izomorfismus**.

4.3 Podprostor vektorového prostoru

Definice 11 (Podprostor vektorového prostoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Řekneme, že W je* **podprostor** *vektorového prostoru V, právě tehdy když platí:*

1. W **je neprázdná podmnožina** V *($W \subseteq V \wedge W \neq \emptyset$.)*

2. W **je vektorovým prostorem** *vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem z tělesa T, které jsou definované na V (tj. splňuje definici 3 vektorového prostoru).*

Skutečnost, že W je podprostorem vektorového prostoru V značíme takto:

$$W \subseteq\subseteq V.$$

Poznámka. Význam pojmů uvedených v definici si můžeme ilustrovat na příkladu množiny $U = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$, která je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $V = R^2$ definovaného nad tělesem $T = R$, tj. $U \subseteq\subseteq V$.

PŘÍKLAD 4.3. *Rozhodněte, zda je množina $W = \{(x, y) \in R^2; y = 3x - 1\}$ vektorovým podprostorem prostoru R^2 (tj. zda platí $W \subseteq\subseteq R^2$).*

Nutná podmínka existence vektorového podprostoru: Vektorový podprostor musí obsahovat nulový vektor z (nad)prostoru V.

Poznámky.
1. „Nejmenším“ podprostorem je tzv. **triviální vektorový prostor** $\{\vec{o}\}$.

2. „Největším“ podprostorem je prostor V samotný.

Je nutné při určování podprostoru ověřovat celou definici?

Věta 10 (O určení vektorového podprostoru)**.** *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W,$

2. $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W.$

PŘÍKLAD 4.4. *Ověřte, zda* $W_i \subseteq\subseteq (R^3, +, R)$:

a) $W_1 = \{[r, 2r, 5r]; r \in R\}$,

b) $W_2 = \{[r, 2r, r^2]; r \in R\}$,

c) $W_3 = \{[r, 2r, 1]; r \in R\}$.

PŘÍKLAD 4.5. *Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory prostoru* R^3 *nad* $\mathbb{R}$.

a) *Množina všech řešení* (x, y, z) *homogenní lineární rovnice*

$$3x + 2y - z = 0.$$

b) *Množina všech vektorů, které jsou lineární kombinací vektorů*

$$\vec{v}_1 = (2, -3, 0), \ \vec{v}_2 = (1, 0, 3).$$

Pokuste se o geometrickou interpretaci daných množin (podprostorů).

Cvičení - Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Příklad 1: Rozhodněte, zda je daná množina vektorů M_i bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, určete souřadnice vektoru $\vec{a} = (1, -2, 5)$ vzhledem k této bázi. Pokud ne, uveďte, jaký vektorový „podprostor" daná množina generuje.

a) $M_1 = \{(-1, 0, 2), (3, 1, -1), (2, 1, 1)\}$,
b) $M_2 = \{(2, 1, 2), (1, 1, -1), (2, 1, 1)\}$,
c) $M_3 = \{(5, 0, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 2)\}$,
d) $M_4 = \{(2, -4, 6), (-1, 2, -3), (4, -8, 12)\}$,
e) $M_5 = \{(1, 2, 0, 1), (2, 0, 1, -3), (1, 1, 1, 1)\}$,
f) $M_6 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,
g) $M_7 = \{(1, 2), (-1, 5), (1, 1)\}$.

Příklad 2: Jsou uvedené polynomy bází vektorového prostoru polynomů stupně nejvýše 2?

a) $1 - 3x + 2x^2,\ 1 + x + 4x^2,\ 1 - 7x$,

b) $4 + 6x + x^2,\ -1 + 4x + 2x^2,\ 5 + 2x - x^2$.

Příklad 3: Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina $M = x + 1,\ x - 1,\ (x + 1)^2,\ (x + 1)^3$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$ vzhledem k této bázi.

Příklad 4: Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina polynomů $M = \{x^3 + 2x^2 + 1, x^3 + x^2 + x, x^3 + 1, x^2 + 1\}$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ vzhledem k této bázi.

Příklad 5: Vytvořte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1, 2, 0, 1, 2)$, $(2, 3, -1, 5, 4)$, $(-1, 0, -2, 0, 1)$. Potom určete souřadnice vektoru $(2, 1, 1, 0, 1)$ vzhledem k této, vámi vytvořené, bázi.

Příklad 6: Najděte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1, 2, 0, 1, 2)$, $(2, 5, -1, 8, 4)$, $(-1, 0, -2, 3, -1)$.

Příklad 7: Najděte bázi vektorového prostoru V, která obsahuje daný vektor $\vec{u}$:

a) $V = [(1, 2, 3, -1), (1, 0, 1, -2), (-2, 1, 4, 3)]$, $\vec{u} = (1, 1, 7, -3)$,

b) $V = [(2, 1, 0, 1), (-1, 1, 2, 3), (2, 3, 4, 0)]$, $\vec{u} = (4, 1, 0, -6)$.

Příklad 8: Určete dimenzi vektorového prostoru
$V = [\{(1, 1, 0, 2, 3), (2, -1, 1, 2, 3), (-1, 0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, -1, 0)\}]$. Pokud to jde, vytvořte jeho bázi tak, aby obsahovala vektor $(-4, 1, 1, 0, 1)$.

5 Steinitzova věta o výměně

Tato věta je pro nás důležitá hlavně svými důsledky. Plynou z ní například tyto skutečnosti:

I. Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

II. Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.

Příklad: Množina M je systémem generátorů příslušného vektorového prostoru. Je možné nahradit některé vektory z M vektory z množiny N tak, aby výsledná množina opět generovala ten samý vektorový prostor?

a) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\},\ N = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$,

b) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\},\ N = \{(0,1,2),(2,0,2)\}$.

Věta 11 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je* **množina generátorů** *prostoru V a nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ jsou* **libovolné lineárně nezávislé vektory** *z V. Potom platí:*

1) $k \leq n$,

2) *při* **vhodném přečíslování** *vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme prvních k z nich nahradit vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ tak, že množina $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{u}_{k+2}, ..., \vec{u}_n\}$ je* **systémem generátorů** *vektorového prostoru V.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k (tj. podle počtu lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_i$).

I. Dokážeme, že věta je pravdivá pro $k = 1$

Máme tedy dokázat, že je-li $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ množina generátorů prostoru V a $\vec{v}_1$ je libovolný lineárně nezávislý vektor z V, potom:
(1) $1 \leq n$,
(2) při vhodném uspořádání mohu první vektor z množiny $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ nahradit vektorem $\vec{v}_1$.

Je zřejmé, že tvrzení (1) platí; pro všechna $n \in N$ je skutečně $1 \leq n$.
Zaměříme se tedy na důkaz tvrzení (2). To, že $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je množina generátorů prostoru V lze zapsat rovností $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$. Potom chceme dokázat, že z předpokladů věty vyplývá, že platí také rovnost $[\vec{v}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$ (tj., že vektor $\vec{u}_1$ můžeme nahradit vektorem $\vec{v}_1$).
Protože $\vec{v}_1 \in V$, lze vektor $\vec{v}_1$ psát jako lineární kombinaci

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + ... + a_n\vec{u}_n. \tag{14}$$

Potom ovšem platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud k ní přidáme vektor, který je lineární kombinací jejích vektorů). Vektor $\vec{v}_1$ je dle předpokladů věty lineárně nezávislý a proto nemůže být nulový. Alespoň jeden z koeficientů a_i lineární kombinace (14) tak musí být různý od nuly. Věta připouští vhodné uspořádání vektorů $\vec{u}_i$, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je a_1. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{a_1}\vec{v}_1 - \frac{a_2}{a_1}\vec{u}_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor V platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Dokázali jsme tak, že lze opravdu při vhodném uspořádání vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ první z nich nahradit vektorem $\vec{v}_1$ a výsledná množina bude stále množinou generátorů prostoru V.

II. Dokážeme, že pokud věta platí pro $k = m$, platí i pro $k = m + 1$

Mějme na paměti, že v tomto kroku (říká se mu „indukční krok“) dokazujeme pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m + 1)$ (kde symbolem $SV(j)$ rozumíme výrok „Steinitzova věta je pravdivá pro $k = j$“) nikoliv pravdivost samotného tvrzení věty.

Předpokládáme tedy, že pro $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$ a m lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ z V je (1) $m \leq n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V$. Chceme dokázat, že potom platí i to, že máme-li $m + 1$ lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ z V, je (1) $m + 1 \leq n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V$.

Protože $\vec{v}_{m+1} \in V$, lze vektor $\vec{v}_{m+1}$ psát jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$, $\vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n$, tj.

$$\vec{v}_{m+1} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_m\vec{v}_m + a_{m+1}\vec{u}_{m+1} + \cdots + a_n\vec{u}_n \tag{15}$$

a platí

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V.$$

Protože vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ jsou lineárně nezávislé, je zřejmé, že alespoň jeden z koeficientů $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ lineární kombinace (15) je různý od nuly (promyslete si detailní zdůvodnění). Věta připouští vhodné uspořádání vektorů množiny generátorů, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je a_{m+1}. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_{m+1}$ vyjádřit z rovnosti (15) jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}}\vec{v}_{m+1} - \frac{b_1}{a_{m+1}}\vec{v}_1 - \frac{b_2}{a_{m+1}}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{b_m}{a_{m+1}}\vec{v}_m - \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\vec{u}_{m+2} - \cdots - \frac{a_n}{a_{m+1}}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor V platí

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] =$$
$$= [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V.$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Opravdu lze při vhodném uspřádání vektorů vektor $\vec{u}_{k+1}$ nahradit vektorem $\vec{v}_{k+1}$. Tím jsme dokázali pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m+1)$, tzv. indukčního kroku důkazu matematickou indukcí. Tím je tento důkaz kompletní a můžeme proto říci, že Steinitzova věta o výměně je dokázána. □

5.1 Důsledky Steinitzovy věty o výměně

Věta 12. Každé dvě báze *konečně generovaného vektorového prostoru V* **mají týž počet prvků**.

Věta 13. *Každá* **skupina lineárně nezávislých vektorů** *libovolného vektorového prostoru* **generovaného $n-$prvkovou množinou** *obsahuje* **nejvýše n vektorů**.

Věta 14. *Je-li $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$* **báze vektorového prostoru** *V a jsou-li vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$* **lineárně nezávislé***, je množina $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$* **rovněž báze** *vektorového prostoru V.*

Věta 15. *Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je* **množina generátorů** *vektorového prostoru V, pak*

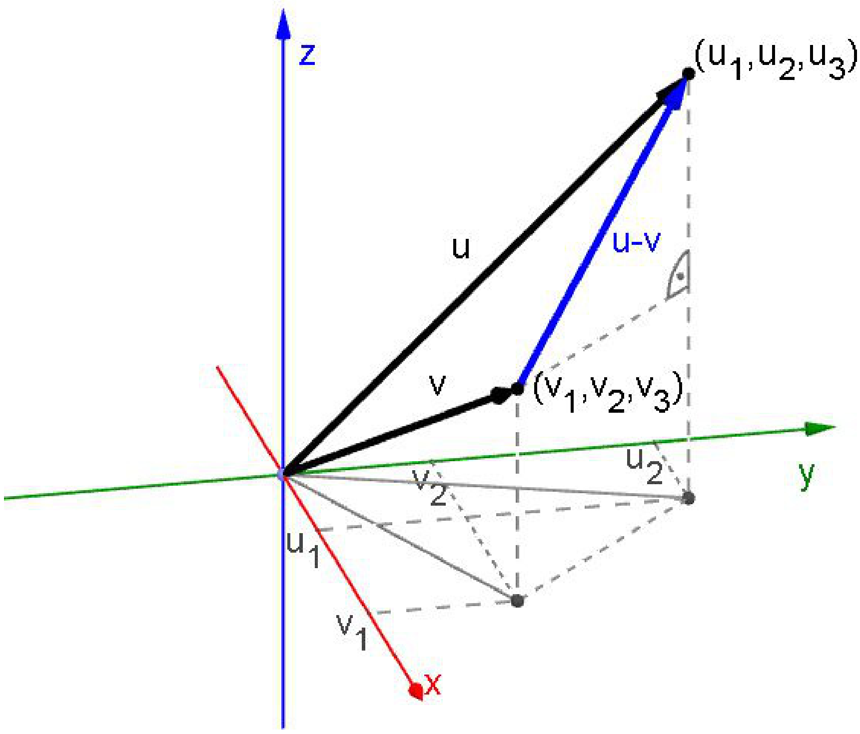
$$\dim V \leq n.$$

6 Skalární součin

Skalární součin[1] je operace, která dvěma vektorům (je to tedy *binární operace*) přiřazuje skalár (v našem případě jde o reálné číslo, obecně se jedná o prvek nějakého tělesa T). Dovoluje nám zavedení *metriky* v afinním bodovém prostoru, tj. umožňuje nám určovat vzdálenosti, odchylky, obsahy a objemy.

Pojem *skalární součin* znáte ze střední školy. Konkrétně se jednalo o tzv. *Eukleidovský skalární součin*, který je pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dán vztahem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{16}$$



Obrázek 8: Vztah pro velikost vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ obsahuje formuli pro výpočet Eukleidovského skalárního součinu

Motivaci pro zavedení skalárního součinu v podobě dané formulí (16) lze nalézt při úpravě vztahu pro výpočet velikosti vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ (viz Obr. 8). Připomeňme, že velikost (též. normu; u geometrického vektoru se jedná o délku orientované úsečky, která je jeho umístěním) vektoru $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ značíme $|\vec{w}|$ a platí $|\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$. Potom pro vektor $\vec{u} - \vec{v}$ platí

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

[1] Pro další studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

(jedná se vlastně o opakované uplatnění Pythagorovy věty v trojrozměrném prostoru, viz Obr. 8), odkud po umocnění obou stran na druhou dostaneme vztah

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2,$$

jehož pravou stranu upravíme na následující tvar

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

a pomocí vztahů pro velikosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ přepíšeme do podoby

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3). \tag{17}$$

Požadavek zápisu rovnosti (17) ve tvaru

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

nás potom vede k definování skalárního součinu $\vec{u}\cdot\vec{v}$ formulí (16). Aby vše „fungovalo“, musí mít tato operace určité vlastnosti. Ty jsou specifikovány v následující definici 12, která zavádí *skalární součin* jako obecnější operaci, než je výše uvedený *Eukleidovský skalární součin*. Ten se tak stává jenom jednou z mnoha operací vyhovujících této definici.

Definice 12 (Skalární součin)**.** *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u},\vec{v}\in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u}\cdot\vec{v}\in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, *(SYMETRIE)*
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$, *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$,
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0 \ \wedge [\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{o}]$. *(POZITIVITA)*

Poznámky.

1. Skalární součin je vždy definován na nějakém vektorovém prostoru V. Potom hovoříme o **vektorovém prostoru se skalárním součinem**, nebo stručněji o **unitárním prostoru**.

2. Nejčastěji se setkáme s některým z následujících tří způsobů zápisu skalárního součinu vektorů $\vec{u},\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{nebo} \quad <\vec{u},\vec{v}> \quad \text{nebo} \quad [\vec{u},\vec{v}].$$

6.1 Příklady skalárních součinů

Existují různé skalární součiny. Za skalární součin považujeme každou operaci, která splňuje definici 12. Uveďme si zde několik příkladů:

1. **Eukleidovský skalární součin**
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$
2. **Vážený skalární součin**
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_2.$$
Obecně zapíšeme vážený skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ formulí
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i v_i,$$
kde c_i je **váha** součinu $i-$tých souřadnic těchto vektorů.
3. Skalární součin
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 4u_2 v_2.$$
4. Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$
$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

PŘÍKLAD 6.1. *Ověřte, že operace definovaná předpisem $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2$ pro $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ je skutečně skalárním součinem.*

6.2 Norma (velikost) vektoru

Ke každému skalárnímu součinu je následující definicí zavedena norma vektoru.

Definice 13. *Normou (velikostí) vektoru $\vec{u} \in V_n$ rozumíme číslo*
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Je třeba mít na paměti, že definice 13 zavádí normu vektoru pomocí skalárního součinu. Hodnota normy tedy závisí na tom, jaký skalární součin použijeme!

PŘÍKLAD 6.2. *Je dán vektor* $\vec{a} = (2, -3, 5)$. *Vypočítejte jeho normu pro*

a) Eukleidovský skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3$,

b) vážený skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2 - u_3v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

Poznámky.

1. Pro normu vektoru používáme též označení $\|\vec{u}\|$ (potřebujeme-li ji odlišit od absolutní hodnoty reálného čísla).

2. Vektor s normou $|\vec{u}| = 1$ nazýváme **jednotkový vektor**.

3. Součin $\vec{u} \cdot \vec{u}$ zkracujeme na $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. Potom je zřejmé, že platí

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2. \tag{18}$$

4. Ke každému skalárnímu součinu přísluší dle definice 13 norma, ale **ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu**. Například:

a) $\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|$, (tzv. 1-norma)

b) $\|\vec{u}\|_{\text{inf}} = \max\{|u_1|, |u_2|, ..., |u_n|\}$,

c) $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$, Eukleidovská norma (též 2-norma)

V některých situacích bude výhodné nahradit daný vektor vektorem stejného směru, ale jednotkové velikosti. Hovoříme o tzv. **normování vektoru**. Vektor $\vec{u}$ (z)normujeme tak, že ho vydělíme jeho velikostí (normou), výsledný vektor označíme třeba $\vec{e}$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \tag{19}$$

PŘÍKLAD 6.3. *Normujte vektor* $\vec{a} = (3, -4, 0)$.

6.3 Důležité nerovnosti

Při zkoumání vlastností vektorových prostorů se skalárním součinem nám výrazně pomohou následující dvě nerovnosti:

1) Cauchyova-Schwarzova nerovnost (en.wikipedia.org: Cauchy–Schwarz inequality),

2) Trojúhelníková nerovnost (en.wikipedia.org: Triangle inequality).

Ukážeme si, že tyto nerovnosti platí v jakémkoliv vektorovém prostoru se skalárním součinem.

6.3.1 Cauchyova–Schwarzova nerovnost

Věta 16 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a pro jakýkoliv skalární součin platí*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|. \tag{20}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ lineárně závislé (tj. rovnoběžné).

Důkaz. Uvažujme vektor $\vec{u} + k\vec{v}$. Potom dle definice skalárního součinu a normy vektoru platí

$$\|\vec{u} + k\vec{v}\|^2 \geq 0,$$
$$\|\vec{u}\|^2 + 2k\vec{u} \cdot \vec{v} + k^2\|\vec{v}\|^2 \geq 0. \tag{21}$$

Když levou stranu nerovnosti (21) vhodně přeuspořádáme

$$\|\vec{v}\|^2 k^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}\, k + \|\vec{u}\|^2 \geq 0,$$

můžeme na ni nahlížet jako na kvadratický trojčlen $Ak^2 + Bk + C$ s proměnnou k. Potom je kvadratická nerovnost (21) vzhledem k této proměnné splněna právě tehdy, když je diskriminant $B^2 - 4AC$ tohoto trojčlenu menší nebo roven nule

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leq 0.$$

Odtud dostaneme po několika úpravách nerovnost (20), kterou chceme dokázat

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2,$$
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

$\square$

Poznámka. Používáme různé zápisy Cauchyovy–Schwarzovy (dále jen „C–S“) nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2},$$

PŘÍKLAD 6.4. *Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, pro která platí:*

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Určete maximální možnou hodnotu e.

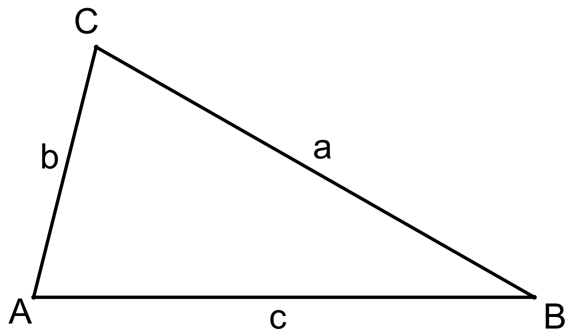
Nápověda: Dané rovnice upravte na tvary

$$a + b + c + d = 8 - e$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2.$$

a uvažujte C–S nerovnost pro vektory $\vec{u} = (a, b, c, d)$ a $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.

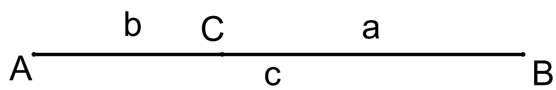
6.3.2 Trojúhelníková nerovnost

Mají-li tři úsečky a, b, c tvořit strany trojúhelníku ABC (viz Obr. 9), musí pro jejich délky platit, že součet každých dvou z nich je větší než ta třetí (tj. $a+b > c$, $a+c > b$, $b+c > a$). Nastane-li v některém z těchto případů rovnost, body A, B, C leží v přímce



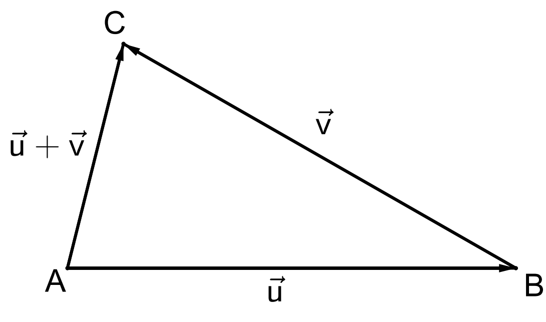
Obrázek 9: Úsečky délek a, b, c jsou stranami trojúhelníku

(trojúhelník degeneruje v úsečku, viz Obr. 10). Tyto skutečnosti jsou popsány tzv.



Obrázek 10: Pro $a + b = c$ leží vrcholy „trojúhelníku" v přímce

trojúhelníkovou nerovností. Pokud do stran trojúhelníku ABC vhodně umístíme vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{u} + \vec{v}$, jak ilustruje Obr. 11, můžeme tuto nerovnost formulovat i pro vektory a jejich normy (viz Věta 17).



Obrázek 11: Trojúhelníková nerovnost pro vektory

Věta 17 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu součinu platí*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \tag{22}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když existuje $k \in R, k \geq 0$ takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$ nebo $\vec{v} = k\vec{u}$.

Důkaz. Ukážeme, že platnost nerovnosti (22) je důsledkem platnosti C-S nerovnosti (20). Nejprve obě strany nerovnosti (22) umocníme na druhou

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2,$$

pravou stranu při tom vyjádříme ve tvaru příslušného trojčlenu

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

Potom u členů, které jsou druhými mocninami norem vektorů, užijeme vztah (18) a zapíšeme je ve tvaru skalární mocniny

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2.$$

Po úpravě levé strany

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2$$

a náležitém zjednodušení dostáváme nerovnost

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|,$$

jejíž pravdivost vyplývá z pravdivosti C–S nerovnosti ($|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$) a z definice absolutní hodnoty ($\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}|$). □

PŘÍKLAD 6.5. *Dokažte následující nerovnost:*

$$|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|| \leq \|\vec{a}-\vec{b}\|; \quad \vec{a},\vec{b} \in V_n.$$

Řešení: Postupujeme úplně stejně jako při výše uvedeném důkazu trojúhelníkové nerovnosti.

PŘÍKLAD 6.6. *Zapište skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pouze užitím normy vektoru.*

Řešení: Využijeme vztah (18), tj. toho, že platí: $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. Nejprve uvažujeme vektor $\vec{u}-\vec{v}$. Dle (18) platí

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2.$$

Odtud potom můžeme vyjádřit skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pomocí norem vektorů takto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2). \tag{23}$$

Další možností je uvažovat vztahy $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ a $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Odečteme-li první od druhého, dostaneme vztah $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$, ze kterého vyjádříme skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ takto

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2). \tag{24}$$

6.4 Odchylka vektorů

Vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů můžeme definovat jako důsledek C–S nerovnosti (20). Z nerovnosti $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ vyplývá vztah

$$\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right| \leq 1.$$

Uvážíme-li definici funkce cos, je potom zřejmé, že pro každé dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}_n$ existuje jediné reálné číslo $\varphi \in \langle 0,\pi\rangle$ takové, že

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Toto číslo nazveme *odchylkou* nenulových vektorů $\vec{u},\vec{v}$.

Definice 14 (Odchylka vektorů)**.** *Odchylkou dvou nenulových vektorů $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}_n$ rozumíme reálné číslo $\varphi \in \langle 0,\pi\rangle$, které je dáno vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \tag{25}$$

PŘÍKLAD 6.7. *Vypočítejte úhel mezi vektory $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{w} = (0,1,1)$.*

a) Uvažujte Eukleidovský skalární součin.

b) Uvažujte vážený skalární součin $\quad \vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3$.

PŘÍKLAD 6.8. *Určete odchylku přímek p,q : p : $x = 1+3t, y = 1+t, z = 1+2t$; $t \in R$, q : $x = 2s, y = 3+9s, z = -1+6s$; $s \in R$.*

PŘÍKLAD 6.9. *Určete hodnotu parametru $c \in R$ tak, aby vektory $\vec{a} = (-2,3,c), \vec{b} = (5,c,-8)$ byly na sebe kolmé.*

Poznámka. Dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\cos\varphi = 0$ tj.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

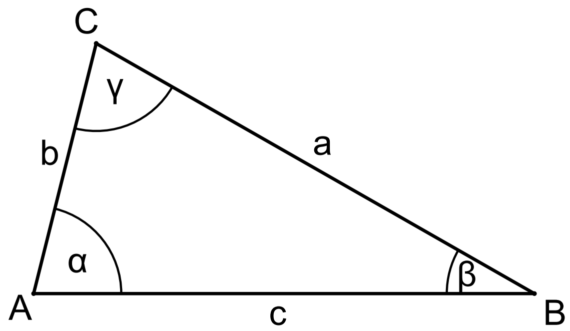
Tuto skutečnost využijeme zanedlouho k zavedení obecnějšího pojmu *ortogonální* vektory.

6.4.1 Kosinová věta

Získané poznatky o skalárním součinu vektorů a jejich normě nyní využijeme k důkazu kosinové věty.

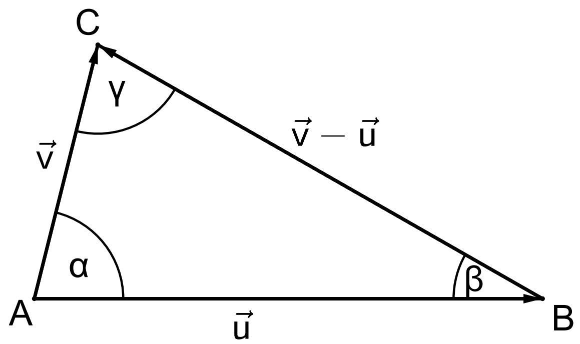
Věta 18 (Kosinová věta)**.** *Pro libovolný trojúhelník ABC s vnitřními úhly α,β,γ protilehlými stranám délek a,b,c (viz Obr. 12) platí*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$



Obrázek 12: Trojúhelník ABC

Důkaz. Uvažujme vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$, jejichž umístěními jsou strany AB a AC trojúhelníku ABC. Strana BC je potom umístěním vektoru $\vec{v} - \vec{u}$ (viz Obr. 13) a pro normy uvedených vektorů platí $\|\vec{u}\| = c, \|\vec{v}\| = b, \|\vec{v} - \vec{u}\| = a$. Při



Obrázek 13: Užití vektorů k důkazu kosinové věty

využití zkušeností z důkazu věty 17 a řešení příkladu 6.6 můžeme psát

$$a^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2 = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \|\vec{u}\|^2 = b^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + c^2.$$

Nyní stačí za skalární součin $\vec{v}\cdot\vec{u}$ dosadit podle vztahu (25) pro výpočet odchylky dvou vektorů a dostaneme vztah

$$a^2 = b^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\alpha + c^2, \tag{26}$$

který je po dosazení dle rovností $\|\vec{v}\| = b$ a $\|\vec{u}\| = c$ již shodný s rovností $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Zbývající rovnosti dokážeme analogicky. □

6.4.2 Pythagorova věta

Pythagorovu větu můžeme chápat jako speciální případ kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník. Uvažujme, že trojúhelník ABC z obrázku 13 má při vrcholu A pravý úhel (tj. $\alpha = 90^\circ$ a $\cos\alpha = 0$). Potom dle (26) platí

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

kde a je přepona a b, c jsou odvěsny tohoto pravoúhlého trojúhelníku.

Cvičení – Skalární součin

1. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li: $A = [1, 2]$, $B = [3, 5]$, $C = [1 + 3\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}]$.

2. K vektorům $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ a $\vec{c} = (3, 2, -4)$ určete vektor $\vec{x}$ tak, aby platilo $\vec{a} \cdot \vec{x} = -5$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -11$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 20$.

3. Kvádr $ABCDEFGH$ má délky hran $|AB| = 4$, $|BC| = 3$ a $|AE| = 5$. Vypočtěte úhel stěnové úhlopříčky DE a tělesové úhlopříčky DF.

4. Ze čtverce o straně a je sestrojen plášť pravidelného trojbokého hranolu. Vypočtěte úhel φ sousedních stran lomené čáry, kterou na plášti hranolu vytváří úhlopříčka daného čtverce.

5. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku $KLM; K = [5\sqrt{3}, 5], L = [-\sqrt{3}, -1], M = [0, 0]$.

6. K jednotkovému vektoru $\vec{a} = \left(\frac{-1}{2}, a_2 \right), a_2 > 0$ najděte jednotkový vektor $\vec{b}$ s ním ortogonální.

7. Vypočtěte úhel mezi úsečkami AB a AC; $A = [1, 2, 3]$, $B = [-1, 0, 1]$, $C = [1, -2, 5]$.

8. Který z následujících výrazů definuje skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{w}$ vektorů $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$:

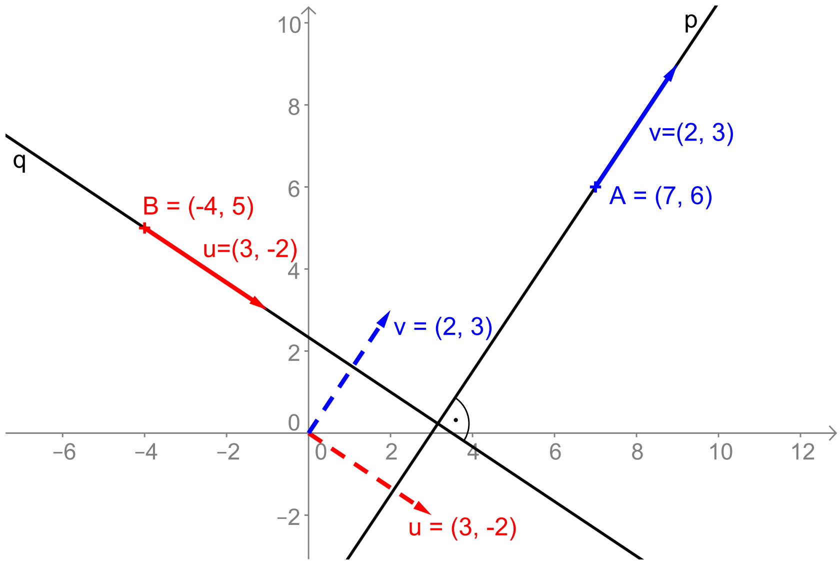
a) $2v_1w_1 + 3v_2w_2$, **b)** $v_1w_2 + v_2w_1$, **c)** $v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2$,
d) $2v_1w_1 + (v_1 - v_2)(w_1 - w_2)$.

7 Ortogonální a ortonormální vektory

Ze vztahu (25) pro výpočet odchylky dvou vektorů vyplývá, že nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Tato skutečnost nám poslouží k zavedení pojmu *ortogonálních vektorů* a využijeme ji při popisu vektorových a bodových (pod)prostorů i při zkoumání jejich vlastností a vzájemných poloh.

PŘÍKLAD 7.1. *Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $A = [7, 6]$ kolmo na přímku $q: \ x = -4 + 3t, y = 5 - 2t; \ t \in R$.*

Řešení: Z parametrických rovnic přímky q vyplývá, že tato přímka je určena bodem $B = [-4, 5]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (3, -2)$ (viz Obr. 14). Má-li být přímka p



Obrázek 14: Přímka p jdoucí bodem A kolmo k přímce q

kolmá k přímce q, je zřejmé, že každý její směrový vektor $\vec{v}$ je kolmý k vektoru $\vec{u}$. K řešení úlohy proto postačuje najít jeden nenulový vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, který splňuje rovnost $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Jeho souřadnice jsou tedy řešením rovnice

$$3v_1 - 2v_2 = 0.$$

Z nekonečně mnoha takových řešení vybereme jedno konkrétní, nabízí se např. $(v_1, v_2) = (2, 3)$. Hledaná přímka p má potom parametrické rovnice $p: \ x = 7 + 2t, y = 6 + 3t; \ t \in R$.

Pojem *ortogonální vektory* (k němuž přidáme ještě pojem *ortonormální vektory*) si definujeme nejprve pro dvojici vektorů.

Definice 15. *[Dvojice ortogonálních a ortonormálních vektorů] Dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{27}$$

Jsou-li navíc jednotkové, tj. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$, nazýváme je ortonormální.

Poznámka. Uvažujeme-li Eukleidovský skalární součin, je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jednotkový právě tehdy, když je splněna podmínka

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1,$$

kterou lze po umocnění obou stran na druhou vyjádřit ve tvaru

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

O vektorech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tak můžeme říci, že jsou *ortonormální* právě tehdy, když současně platí

$$\begin{aligned} u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1, \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jako ortogonální či ortonormální můžeme označit i větší skupinu vektorů, jak uvádí následující definice.

Definice 16 (Ortogonální a ortonormální vektory)**.** *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0,$$

pro všechna $i, j = 1, 2, ..., k$; $i \neq j$. Jsou-li navíc všechny vektory jednotkové, tj.

$$|\vec{u}_i| = 1,$$

pro všechna $i = 1, 2, ..., k$, nazýváme je ortonormální.

Poznámky.

1. Ortogonální vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme takto

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Ortogonalita je zobecněním kolmosti. Protože kromě termínu „ortogonální vektory“ používáme též označení „kolmé vektory“, je dobré mít na paměti, že definice ortogonálních vektorů připouští i nulový vektor a vyplývá z ní, že nulový vektor je ortogonální ke všem vektorům. Hovoříme-li o kolmých vektorech, uvažujeme vesměs vektory nenulové.

3. Pojmem *ortogonální vektory* označujeme skupinu dvou, ale i více vektorů, které splňují definici 16. Tj. skupinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ nazveme ortogonální, když pro každé dva *různé* vektory z nich platí $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$.

4. *Ortonormální* jsou vektory, které jsou *ortogonální* a navíc všechny *jednotkové*, tj. platí:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_i^j$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

8 Ortonormální báze

Bází vektorového (pod)prostoru je jakákoliv množina jeho generátorů, která je lineárně nezávislá. Výlučné postavení mezi všemi bázemi mají díky svým vlastnostem tzv. *ortonormální báze*, tj. báze, jejichž vektory jsou *ortonormální* (viz def. 16).

Definice 17 (Ortogonální a ortonormální báze)**.** *Bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ vektorového prostoru V se skalárním součinem nazveme ortogonální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortogonální.*
Bázi B nazveme ortonormální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortonormální.

Poznámka. Báze B je tedy ortonormální, jestliže

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_i^j$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

Příklad: Rozhodněte, zda se jedná o ortogonální či ortonormální báze:

a) $B_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$,

b) $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,

c) $B_3 = \{(2, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 4)\}$.

Věta 19. *Jsou-li nenulové vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, $n \in N$, ortogonální, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že nenulové ortogonální vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé. Aspoň jeden koeficient k_i lineární kombinace

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots k_n\vec{u}_n = \vec{o} \tag{28}$$

tak musí být různý od nuly. Nechť je to třeba k_1. Pokud nyní skalárně vynásobíme obě strany rovnosti (28) vektorem $\vec{u}_1$, dostaneme rovnost

$$k_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \ldots k_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 = \vec{o} \cdot \vec{u}_1, \tag{29}$$

na jejíž levé straně jsou všechny členy kromě prvního díky předpokládané ortogonalitě vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ rovny nule. Rovnost (29) se tak redukuje na tvar

$$k_1\vec{u}_1^2 = 0, \tag{30}$$

kde $\vec{u}_1^2 \neq 0$ (vektory $\vec{u}_i$ jsou dle předokladu nenulové). Potom ale musí být $k_1 = 0$, což je ale ve sporu s předpokladem, že $k_1 \neq 0$. Tím je pravdivost věty dokázána. □

8.1 Výhody ortonormální báze

Uvedeme si dvě výhody, které nám oproti „obyčejné“ bázi přinese použití ortonormální báze.

8.1.1 Výpočet skalárního součinu

Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ určeny souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, je jakýkoliv skalární součin těchto vektorů dán vztahem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n,$$

bez ohledu na jeho konkrétní definici.

Tuto zajímavou a velice užitečnou skutečnost snadno dokážeme. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů báze B

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n, \quad \vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n$$

a skalárně je spolu vynásobíme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n) \cdot (v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n). \tag{31}$$

Pravou stranu (31) roznásobíme užitím vlastností 2 a 3 z definice skalárního součinu (viz def. 12). Dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1\vec{b}_1^2 + u_1v_2\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + u_1v_n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + \\ + u_2v_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + u_2v_2\vec{b}_2^2 + \cdots + u_2v_n\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \\ + \cdots + \\ + u_nv_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + u_nv_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \cdots + u_nv_n\vec{b}_n^2, \end{aligned} \tag{32}$$

kde ovšem, díky ortonormálnosti báze B, pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ pokud $i \neq j$, jinak $\vec{b}_i^2 = 1$. Rovnost (32) je tak pro každou ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ ekvivalentní rovnosti

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n, \tag{33}$$

bez ohledu na to, jak je definován skalární součin „$\cdot$“.

Poznali jsme, že pokud používáme ortonormální bázi (a my tak činíme, protože není-li řečeno jinak, pracujeme se souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi), nemusíme se starat o definici skalárního součinu a počítáme ho tak, jak jsme zvyklí ze střední školy.

8.1.2 Určení souřadnic vektoru vzhledem k ortonormální bázi

Uvažujme vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, jehož souřadnice $u_1, u_2, ..., u_n$ jsou dány vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, tj.

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + ... + u_n\vec{b}_n. \tag{34}$$

Potom pro $i-$tou souřadnici u_i vektoru $\vec{u}$ platí

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i, \tag{35}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah (35) nám umožňuje rychlý výpočet jednotlivých souřadnic vektoru. Podstatu jeho důkazu si ukážeme na případu $i = 1$, zobecnění pro $i = 1, 2, \ldots, n$ bude zřejmé. Jestliže vynásobíme obě strany (34) vektorem $\vec{b}_1$, dostaneme rovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = u_1\vec{b}_1^2 + u_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + ... + u_n\vec{b}_n \cdot \vec{b}_1, \tag{36}$$

která je díky ortonormálnosti vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ ekvivalentní s rovností

$$u_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_1.$$

Pro zobecnění stačí zaměnit 1 za i a uvažovat $i = 1, 2, \ldots, n$.

PŘÍKLAD 8.1. *Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (1, 1, 1)$ vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\vec{u}_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$,*

Řešení: Označme v_i^B $i-$tou souřadnici vektoru $\vec{v}$ vzhledem k B. Potom $v_1^B = (1, 1, 1)\cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $v_2^B = (1, 1, 1)\cdot(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $v_3^B = (1, 1, 1)\cdot(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}) = \frac{4}{\sqrt{30}}$.

8.2 Gram–Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 8 nám zaručuje, že každý konečně generovaný vektorový prostor má alespoň jednu konečnou bázi. Poté, co jsme se seznámili s výhodami ortonormální báze, je zřejmé, že bychom uvítali stejnou záruku i pro existenci ortonormální báze. A skutečně, taková záruka existuje, pro vektorové prostory se skalárním součinem nám ji dává následující věta.

Věta 20 (Existence ortonormální báze)**.** *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor se skalárním součinem má aspoň jednu ortonormální bázi.*

Důkaz. Existence konečné báze je zaručena větou 8. K důkazu věty 20 tak postačí ukázat, že z každé konečné báze uvažovaného vektorového (pod)prostoru můžeme vytvořit bázi ortonormální. To skutečně možné je. Garantuje nám to postup známý jako *Gram–Schmidtův ortogonalizační proces.* Místo důkazu věty 20 si podrobně rozebereme tento postup pro případ vektorových prostorů dimenze dva a tři. Zobecnění postupu pro případ vektorového prostoru dimenze n, které je podstatou důkazu věty, je potom zřejmé. □

Gram–Schmidtův ortogonalizační proces se týká vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru, využíváme ho však především k určování ortonormálních bází vektorových podprostorů. V případě vektorových prostorů můžeme vždy „sáhnout“ po kanonické bázi (tj. například pro R^2 je to $\{(1,0),(0,1)\}$).

Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 2

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (19) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{a}_1$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1. \tag{37}$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{a}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + k\vec{b}_1 \tag{38}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + k\vec{b}_1^2 = 0. \tag{39}$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}, \tag{40}$$

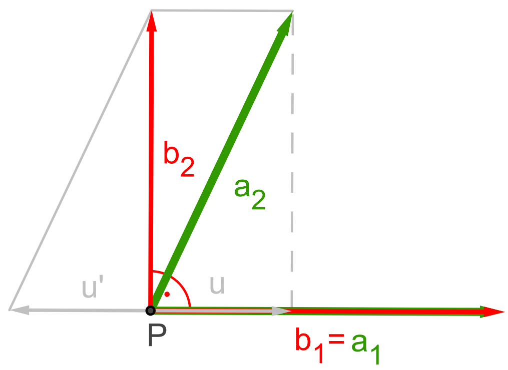
kterou dosadíme do vztahu (38) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{41}$$

Rovnostmi (37) a (41) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{42}$$

Poznámka. Vztah (40) pro výpočet vektoru $\vec{b}_2$ kolmého k vektoru $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ můžeme odvodit „ryze geometricky“, bez nutnosti řešit rovnici (39) pro neznámou k. Použijeme k tomu obrázek 16 (nebo příslušný aplet vytvořený v GeoGebře). Vidíme, že vektor $\vec{b}_2$, který má být kolmý k $\vec{b}_1$, dostaneme jako součet vektoru $\vec{a}_2$ s vektorem $\vec{u}'$, který je vektorem opačným k vektoru $\vec{u}$, jehož velikost je rovna kolmému průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$.



Obrázek 15: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 2 - vytvoření ortogonální báze

Pro velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$ platí

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1|}{|\vec{b}_1|}. \tag{43}$$

Přitom výraz $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \geq 0$ pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ a $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 < 0$ pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, kde φ je úhel mezi vektory $\vec{b}_1$ (tj. také $\vec{a}_1$) a $\vec{a}_2$). Pravdivost tohoto vztahu pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ snadno prokážeme rozepsáním jeho pravé strany podle vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů. Dostaneme vztah

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{|\vec{a}_2||\vec{b}_1| \cos \varphi}{|\vec{b}_1|} = |\vec{a}_2| \cos \varphi,$$

který odpovídá definici hodnoty funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku ($|\vec{a}_2|$ je délka přepony, $|\vec{u}|$ je délka odvěsny přilehlé k úhlu φ). Pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ stačí uvažovat úhel $\pi - \varphi$.

Známe tedy velikost vektoru $\vec{u}$ (viz (43)) a víme, že má směr vektoru $\vec{b}_1$ (nebo opačný, pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$). Stačí tedy vynásobit číslem $\frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}$ jednotkový vektor směru $\vec{b}_1$ a dostaneme vektor $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2} \vec{b}_1$$

Podle obrázku 16 je potom vhodným vektorem $\vec{b}_2$ součet $\vec{a}_2 + \vec{u}'$, kde $\vec{u}' = -\vec{u}$, tj.

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{u}' = \vec{a}_2 - \vec{u} = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2} \vec{b}_1. \tag{44}$$

Vztah (44) je totožný se vztahem (40). Geometrickou úvahou jsme tak dostali stejný výsledek jako výpočtem. (*konec poznámky*)

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} \quad . \tag{45}$$

Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 3

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (19) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

Postup vytvoření prvních dvou vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze je identický s výše popsaným případem podprostoru dimenze 2. Platí tedy

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{46}$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ a $\vec{a}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 \tag{47}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 + n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 = 0, \tag{48}$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + n\vec{b}_2^2 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 + n\vec{b}_2^2 = 0. \tag{49}$$

Z těchto podmínek (48), (8.2) kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}, \quad n = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2} \tag{50}$$

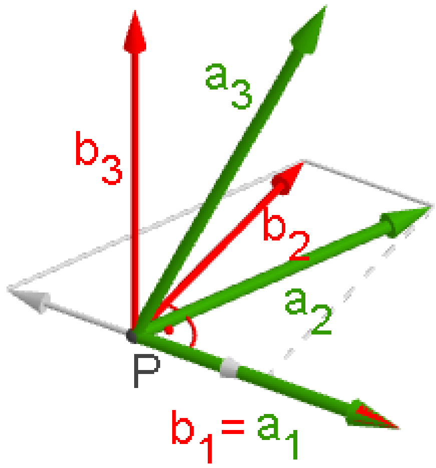
které dosadíme do vztahu (47) pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{51}$$

Rovnostmi (46) a (51) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{52}$$

Poznámka. I v případě nalezení třetího vektoru ortogonální báze můžeme uplatnit „ryze geometrický“ přístup. Tentokrát bychom použili opačné vektory ke dvěma kolmým průmětům vektoru $\vec{a}_3$ do směrů vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$, které bychom složili s vektorem $\vec{a}_3$, abychom dostali vektor $\vec{b}_3$ kolmý na oba vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$. Detailně se zde tímto postupem nebudeme zabývat.



Obrázek 16: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 3 - vytvoření ortogonální báze

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}. \tag{53}$$

PŘÍKLAD 8.2. *Určete ortonormální bázi podprostoru $W \subseteq\subseteq R^3$, který je generován vektory $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$.*

Řešení:

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, 2)$ a $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + k\vec{b}_1 = (0, 1, -1) + k(1, 1, 2) \tag{54}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1, 1, 2) \cdot (0, 1, -1) + k(1, 1, 2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1,1,2)\cdot(0,1,-1)}{(1,1,2)^2} = \frac{1}{6},$$

kterou dosadíme do vztahu (54) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (0,1,-1) + \frac{1}{6}(1,1,2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{-2}{3}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 6, abychom se zbavili zlomků. Tuto úpravu oceníme zanedlouho při normování vektoru. Hledanou ortogonální bázi podprostoru W tak tvoří vektory

$$\vec{b}_1 = (1,1,2), \quad \vec{b}_2 = (1,7,-4). \tag{55}$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{-4}{\sqrt{66}}\right). \tag{56}$$

Řešení v programu wxMaxima:

(%i1) `load(eigen);`

(%o1) $C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.26.0/share/matrix/eigen.r$

(%i2) `b:gramschmidt({[1,1,2],[0,1,-1]});`

(%o2) $[[0,1,-1],[1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}]]$

(%i3) `e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);`

(%o3) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

(%o4) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}}]$

Poznámka. Vidíme, že algoritmus, který se skrývá za příkazem „gramschmidt“, nezpracovává vektory v pořadí, v jakém je zadáme, ale volí si optimální pořadí sám. Stejně můžeme postupovat i my.

PŘÍKLAD 8.3. *Určete ortonormální bázi vektorového prostoru* $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$.

Řešení:

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$ a $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{u}_2 + k\vec{b}_1 = (1, 0, 1, 1) + k(1, 1, -1, -2) \tag{57}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1, 1, -1, -2) \cdot (1, 0, 1, 1) + k(1, 1, -1, -2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1, 1, -1, -2) \cdot (1, 0, 1, 1)}{(1, 1, -1, -2)^2} = \frac{2}{7},$$

kterou dosadíme do vztahu (57) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (1, 0, 1, 1) + \frac{2}{7}(1, 1, -1, -2) = \left(\frac{9}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 7, abychom se zbavili zlomků. Dostaneme

$$\vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3).$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2), \vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3)$ a $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$

$$\vec{b}_3 = \vec{u}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 = (0, 1, 1, 0) + m(1, 1, -1, -2) + n(9, 2, 5, 3)$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = (1, 1, -1, -2) \cdot (0, 1, 1, 0) + m(1, 1, -1, -2)^2 + n(1, 1, -1, -2) \cdot (9, 2, 5, 3) = 7m =$$
$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = (9, 2, 5, 3) \cdot (0, 1, 1, 0) + m(9, 2, 5, 3) \cdot (1, 1, -1, -2) + n(9, 2, 5, 3)^2 = 7 + 119n = 0$$

Z těchto podmínek kolmosti vektorů ortogonální báze (všimněte si, že v tomto případě jsou vektory $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$ a $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$ již na sebe kolmé) vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = 0, \quad n = -\frac{1}{17}$$

které dosadíme do vztahu pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = (0,1,1,0) + 0(1,1,-1,-2) - \frac{1}{17}(9,2,5,3) = \left(-\frac{9}{17}, \frac{15}{17}, \frac{12}{17}, -\frac{3}{17}\right).$$

Vektor $\vec{b}_3$ násobíme 17, abychom se zbavili zlomků. Potom vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W jsou

$$\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2), \quad \vec{b}_2 = (9,2,5,3), \quad \vec{b}_3 = (-9,15,12,-3).$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right), \\
\vec{e}_2 &= \left(\frac{9}{\sqrt{119}}, \frac{2}{\sqrt{119}}, \frac{5}{\sqrt{119}}, \frac{3}{\sqrt{119}}\right), \\
\vec{e}_3 &= \left(-\frac{9}{\sqrt{459}}, \frac{15}{\sqrt{459}}, \frac{12}{\sqrt{459}}, -\frac{3}{\sqrt{459}}\right).
\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima (kód navazuje na řešení předcházejícího příkladu):

```
(%i5) kill(b);
```

(%o5) *done*

```
(%i6) b:gramschmidt({[1,1,-1,-2],[1,0,1,1],[0,1,1,0]});
```

(%o6) $[[0,1,1,0],[1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1],[\frac{3^2}{5},\frac{3}{5},-\frac{3}{5},-\frac{2\,3}{5}]]$

```
(%i7) e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);
      e[3]:unitvector(b[3]);
```

(%o7) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]$

(%o8) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}]$

(%o9) $[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}]$

Poznámka. Příkaz „gramschmidt“ opět volil jiné pořadí zpracování vektorů a našel jinou ortogonální bázi, s „lépe vypadajícími“ vektory.

Kromě volby vhodného pořadí vektorů si ruční výpočet vektorů ortonormální báze daného podprostoru můžeme v řadě případů podstatně zjednodušit také tím, že daný systém generátorů nahradíme vektory, které jsme získali eliminací příslušné matice. V případě příkladu 8.3 jsme tak mohli místo původních vektorů $(1, 1, -1, -2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)$ počítat s vektory $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)$, které generují stejný podprostor, protože

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vyzkoušejte!

Cvičení – Ortonormální báze

1. Určete ortonormální bázi vektorového (pod)prostoru W :
a) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}]$; $\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$,

b) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$,

c) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (2, -2, 3)$,

d) $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1), \vec{u}_3 = (3, 1, 0, 1)$.

2. Určete ortonormální bázi vektorového podprostoru $V \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4$, který obsahuje všechny vektory kolmé na vektor $\vec{u} = (1, 2, -1, -3)$.

3. Určete ortonormální báze následujících vektorových podprostorů $\mathbb{R}^3$:

a) Rovina generovaná vektory $(0, 2, 1)$, $(1, -2, -1)$.

b) Rovina definovaná rovnicí $2x - y + 3z = 0$.

c) Množina všech vektorů kolmých na vektor $(1, -1, -2)$.

4. Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = [\{(1, 1, 2), (1, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq V_3$.

8.3 Ortogonální matice

Z geometrie víme, že afinní transformace bodového prostoru A_n daná rovnicí

$$X = AX' + B,$$

$X, X' \in A_n$, je shodností právě tehdy, když pro matici A platí vztah

$$A^T A = I, \tag{58}$$

kde I je jednotková matice řádu n[1]. Matice A je čtvercová a uvedený vztah je možné rozepsat rovnicemi pro její prvky. Například pro afinní transformaci roviny, jejíž matice má tvar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

je podmínka (58) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{59}$$

V případě afinní transformace prostoru A_n s maticí

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je podmínka (58) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots n, \tag{60}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1,\ i = 1, 2, \dots n. \tag{61}$$

Porovnáme-li vztahy (60), (61) s definicí ortonormálních vektorů (viz def. 16), vidíme, že řádkové vektory matice A shodnosti v prostoru A_n jsou ortonormální (platí to i pro sloupcové vektory matice A). Protože ortogonální vektory jsou vždy nezávislé (viz věta 19), můžeme podle definice 17 dokonce říci, že řádkové (sloupcové) vektory matice A tvoří ortonormální bázi. Takovouto matici nazýváme „ortogonální matice“ (někdy též „ortonormální matice“[2]).

[1] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 55
[2] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 57

Definice 18 (Ortogonální matice)**.** *Ortogonální maticí rozumíme čtvercovou matici A, pro kterou platí:*

$$A^T \cdot A = I.$$

Poznámky.

1. Po ortogonální matici A zřejmě platí $A^T = A^{-1}$. Potom ale též

$$A \cdot A^T = I.$$

2. V *ortogonální matici* je skalární součin dvou různých řádků roven nule, skalární součin stejných řádků je roven jedné. Symbolicky zapsáno:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_i^j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. *Determinant ortogonální matice.* Pro A platí

$$A^T \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad \det(A^T \cdot A) = \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = \det I = 1.$$

Potom

$$|\det A| = 1,$$

jinak zapsáno

$$\det A = \pm 1.$$

PŘÍKLAD 8.4. *Transformace, pro které je $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinity. Ukažte, že ne každá ekviafinita má matici A ortogonální (tj. ne každá ekviafinita je shodností).*

PŘÍKLAD 8.5. *Ukažte, že*

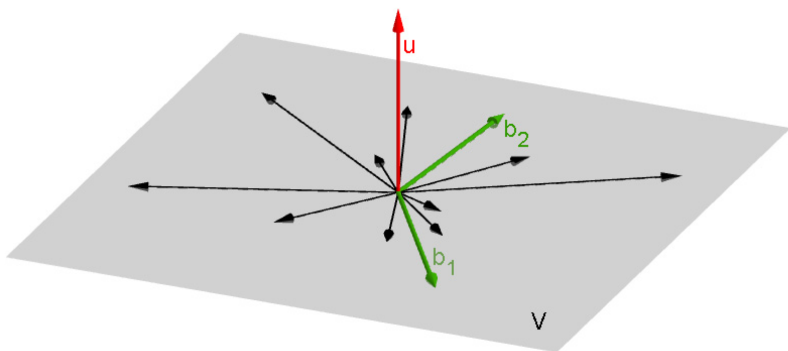
$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

matice otočení kolem počátku soustavy souřadné o úhel α, je ortogonální matice. Spočítejte její determinant.

9 Kolmost vektorových podprostorů

Od kolmosti dvou vektorů nyní přejdeme ke kolmosti dvou vektorových podprostorů. Budeme se zabývat otázkou, kdy jsou dva vektorové podprostory na sebe kolmé a jak to poznáme. Začneme tím, že stanovíme, jak určit kolmost jednoho vektoru k podprostoru.

9.1 Kolmost vektoru k podprostoru



Obrázek 17: Vektor $\vec{u}$ kolmý k podprostoru $V = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$

Definice 19 (Kolmost vektoru k podprostoru). *O vektoru $\vec{u}$ řekneme, že je kolmý k vektorovému podprostoru V_k, právě když je kolmý ke každému vektoru z tohoto podprostoru. Značíme*

$$\vec{u} \perp V_k.$$

Uvedená definice nám nedává přímý návod, jak o kolmosti vektoru k vektorovém podprostoru rozhodnout. Vektorů je ve vektorovém podprostoru nekonečně mnoho a ověření kolmosti daného vektoru ke každému z nich je proto nereálné. Naštěstí však víme, že každý vektor z vektorového podprostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů jeho báze, a báze už má konečný počet vektorů (viz Obr. 17).

Věta 21 (Kritérium kolmosti vektoru k podprostoru). *Vektor $\vec{u} \in V_n$ je kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subsetneq V_n$, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k\}$.*

Důkaz. Podle definice 19 je vektor $\vec{u} \in V_n$ kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subsetneq V_n$ právě tehdy, když je kolmý ke každému vektoru $\vec{v} \in V_k$, tj. když pro každý vektor $\vec{v} \in V_k$ platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{62}$$

Protože $V_k = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k]$, můžeme každý vektor $\vec{v} \in V_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{b}_k$. Po dosazení do (62) a roznásobení tak dostáváme rovnost

$$v_1\vec{u} \cdot \vec{b}_1 + v_2\vec{u} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0, \tag{63}$$

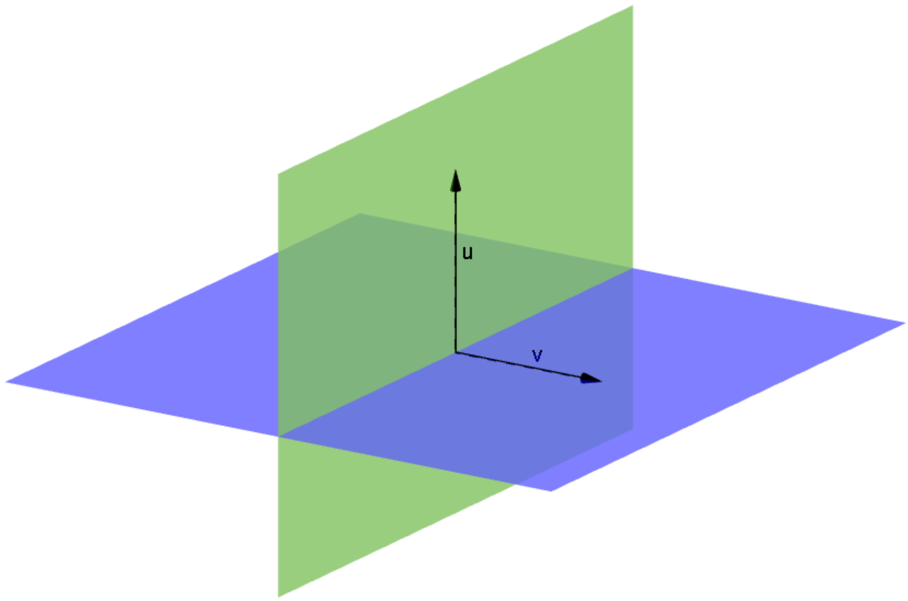
která je určitě splněna, jestliže je vektor $\vec{u}$ kolmý ke všem vektorům báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k$, tj., jestliže

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2 = \cdots = \vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0. \tag{64}$$

□

9.2 Kolmost dvou podprostorů

Kolmost vektoru k vektorovému podprostoru využijeme v definici a při určení kolmosti dvou vektorových podprostorů.



Obrázek 18: Dva kolmé podprostory

Definice 20 (Kolmost vektorových podprostorů)**.** *Dva vektorové podprostory $V_r, V_s \subseteq\subseteq V_n$ jsou na sebe kolmé, jestliže v každém z nich existuje vektor, který je kolmý k druhému podprostoru. Značíme*

$$V_r \perp V_s$$

Při rozhodování o kolmosti dvou konkrétních vektorových podprostorů daných svými bázemi budeme využívat „nutnou a postačující podmínku kolmosti dvou podprostorů", která je formulována v následující větě 22. Než ji uvedeme, objasníme si její smysl (a tím i myšlenku jejího důkazu, který přenecháme čtenáři) na příkladu dvou podprostorů dimenzí 2 a 3.

PŘÍKLAD 9.1. *Rozhodněte, za jakých podmínek jsou na sebe kolmé podprostory* $V_2 = [\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}], V_3 = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}]$

Řešení: Dle definice 20 jsou dané dva vektorové podprostory V_2, V_3 na sebe kolmé, jestliže v prostoru V_2 existuje nějaký vektor $\vec{x}$, který je kolmý k podprostoru V_3, a zároveň v podprostoru V_3 existuje vektor $\vec{y}$ kolmý k prostoru V_2. K popsání těchto skutečností využijeme tvrzení věty 21 („vektor je kolmý k podprostoru, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze").

1. Existuje vektor $\vec{x} \in V_2$, který je kolmý k V_3.

Jestliže vektor $\vec{x}$ náleží podprostoru V_2, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Dle věty 21 je vektor $\vec{x}$ kolmý k podprostoru V_3, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$
\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{b}_1 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 = 0,\\
\vec{x} \cdot \vec{b}_2 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0,\\
\vec{x} \cdot \vec{b}_3 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Homogenní soustava (65) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$
A_1 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix}
\tag{66}
$$

má hodnost menší než 2.

2. Existuje $\vec{y} \in V_3$, který je kolmý k V_2.

Jestliže vektor $\vec{y}$ náleží podprostoru V_3, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Dle věty 21 je vektor $\vec{y}$ kolmý k podprostoru V_2, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$
\begin{aligned}
\vec{y} \cdot \vec{a}_1 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0\\
\vec{y} \cdot \vec{a}_2 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_2 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_2 = 0
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Homogenní soustava (67) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$
A_2 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix}
\tag{68}
$$

má hodnost menší než 3 (což je v tomto případě určitě splněno).

Vidíme, že pro kolmost podprostorů V_2, V_3 jsou rozhodující hodnosti matic A_1, A_2. Protože $A_2 = A_1^T$ a $h(A_2) = h(A_1^T)$, stačí uvažovat jenom jednu z těchto matic, například A_2, kterou v souladu s následující větou označíme G. Aby byly podprostory

V_2, V_3 na sebe kolmé, tj. aby měly obě uvedené soustavy (65), (67) nenulová řešení, musí být hodnost matice

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{69}$$

menší než 2. V obecném případě bychom řekli, že hodnost takovéto matice musí být menší než minimum z dimenzí posuzovaných vektorových prostorů, jak uvádí následující věta.

Věta 22 (Nutná a postačující podmínka kolmosti dvou podprostorů)**.** *Dva vektorové podprostory V_r a V_s s bázemi $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ a $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když pro hodnost matice*

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \ldots & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_s \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \ldots & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{a}_r \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_2 & \ldots & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_s \end{bmatrix}$$

platí

$$h(G) < \min(r, s).$$

PŘÍKLAD 9.2. *Rozhodněte, zda jsou dané vektorové podprostory prostoru R^4 na sebe kolmé:*

a) $V_2 = [(1, 0, 1, 1), (0, 2, -1, 1)],\ V_3 = [(0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 2), (1, 2, 1, -2)]$,

b) $V_2 = [(1, 1, 2, -1), (3, 0, 1, -1)],\ V_3 = [(1, 0, 1, 2), (2, -3, 2, 2), (1, 1, 1, -2)]$,

c) $V_1 = [(1, 0, -1, 2)],\ V_3 = [(0, 1, 2, 1), (1, 3, -1, -1), (2, 1, 0, -1)]$.

Poznámka. Zvláštní kategorii vzájemně *kolmých podprostorů* daného vektorového prostoru V_n tvoří tzv. *totálně kolmé podprostory.* Jedná se o dvojice podprostorů, které jsou kolmé a součet jejich dimenzí je přitom roven n. Říkáme, že tyto podprostory jsou vzájemně svými *ortogonálními doplňky.*

9.3 Ortogonální doplněk vektorového podprostoru

PŘÍKLAD 9.3. *Určete množinu všech vektorů z V_3, které jsou kolmé (ortogonální) k vektoru $\vec{u} = (2, 1, -3)$.*

Řešení: Hledáme množinu $W \subseteq V_3$, pro kterou platí: $\forall \vec{x} \in W;\ \vec{u} \cdot \vec{x} = 0$, tj. množinu všech řešení homogenní rovnice

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \tag{70}$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$. Rovnici (70) můžeme uvažovat jako „soustavu“ jedné rovnice o třech neznámých. Potom dvě ze tří neznámých, např. x_1 a x_3 nahradíme reálnými parametry a zbývající neznámou x_2 dopočítáme. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= r, \\ x_3 &= s, \\ x_2 &= -2r + 3s;\ \ r, s \in R \end{aligned} \tag{71}$$

a hledanou množinu W zapíšeme ve tvaru

$$W = \{(r, -2r + 3s, s); r, s \in R\}. \tag{72}$$

Protože $W = \{(r, -2r+3s, s); r, s \in R\} = \{r(1, -2, 0)+s(0, 3, 1); r, s \in R\}$, můžeme W psát jako lineární obal dvojice vektorů $(1, -2, 0), (0, 3, 1)$,

$$W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]. \tag{73}$$

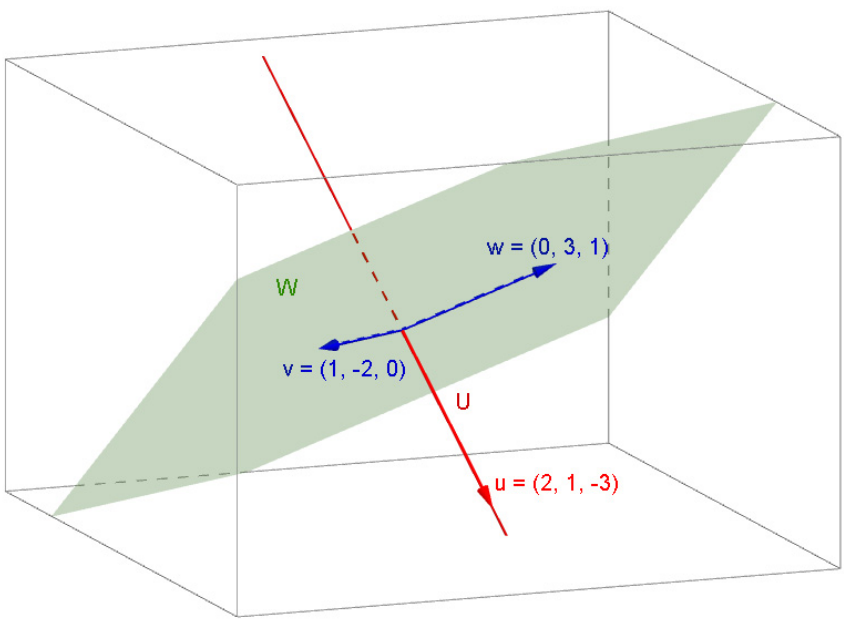
Potom je, jak již víme, W vektorovým podprostorem V_3,

$$W \subseteq\subseteq V_3.$$

Pokud budeme uvažovat také podprostor generovaný vektorem $\vec{u}$,

$$U = [\{(2, 1, -3))\}], \tag{74}$$

tvoří U, W dvojici vzájemně se ortogonálně doplňujících podprostorů vektorového



Obrázek 19: $U = [\{(2, 1, -3))\}], W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]$

prostoru V_3 (viz Obr. 19), značíme

$$U = W^\perp, \quad W = U^\perp$$

a čteme „podprostor U je ortogonálním doplňkem podprostoru W“, resp. „podprostor W je ortogonálním doplňkem podprostoru U“.

Poznámka. Ve vektorovém prostoru dimenze 3 je ortogonálním doplňkem roviny (přesněji vektorového prostoru dimenze 2) přímka na ní kolmá (vektorový prostor dimenze 1, jehož vektory jsou ortogonální se všemi vektory té roviny) a ortogonálním doplňkem přímky je naopak rovina.

Definice 21 (Ortogonální doplněk vektorového podprostoru)**.** *Ortogonálním doplňkem vektorového podprostoru* $V_k \subseteq\subseteq V_n$ *rozumíme množinu všech vektorů kolmých (ortogonálních) k* V_k*. Značíme* $V_k^{\perp}$*.*

Ortogonální doplněk vektorového podprostoru je vektorový prostor a jeho dimenze je $n-k$. Důkaz toho, že se jedná o vektorový prostor přenecháme čtenáři. Stačí na danou množinu uplatnit větu 10 (o určení vektorového podprostoru). Zde se zaměříme jenom na údaj o dimenzi $n-k$ podprostoru $V_k^{\perp}$.

Věta 23 (Dimenze ortogonálního doplňku)**.** *Je-li* V_k *podprostor vektorového prostoru* V_n*, je jeho ortogonální doplněk* $V_k^{\perp}$ *vektorový prostor dimenze* $n-k$*.*

Důkaz. Nechť $V_k = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$, kde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ je ortonormální báze. Potom pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in V_k^{\perp}$ musí platit $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = 0$; $i = 1, 2, \dots, k$. Dostáváme tak homogenní soustavu k rovnic o n neznámých

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0,\\
\dots\dots&\\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0,
\end{aligned}
\tag{75}
$$

jejíž matice má hodnost k (její řádkové vektory $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, k$ jsou ortonormální, proto jsou dle věty 19 lineárně nezávislé). Z n neznámých je tedy k základních a $n-k$ volných. Proto musíme použít $n-k$ parametrů a množinou všech řešení soustavy, tj. ortogonálním doplňkem prostoru V_k, je tak vektorový prostor dimenze $n-k$. □

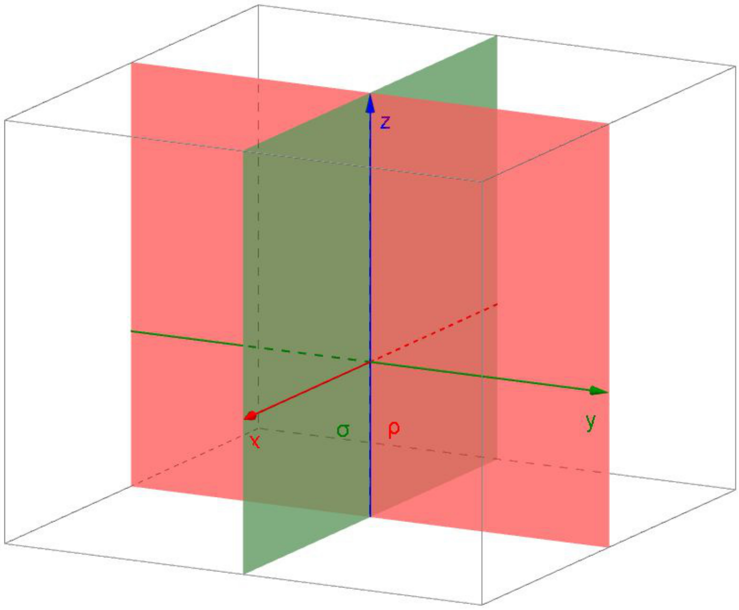
Poznámka. Z výše uvedeného vyplývá, že součet dimenzí dvou vektorových podprostorů prostoru V_n, které jsou vzájemně svými ortogonálními doplňky, je n. Tj. pro $V_r, V_s \subseteq\subseteq V_n$, kde $V_r = V_s^{\perp}$ (a tedy také $V_s = V_r^{\perp}$), platí

$$r + s = n.$$

Jak bylo uvedeno již v poznámce na straně 76, rozlišujeme podprostory *kolmé* ($V_r \perp V_s$) a podprostory*totálně kolmé* ($V_r = V_s^{\perp}$ a $V_s = V_r^{\perp}$). Přitom prostory totálně kolmé jsou zároveň i kolmé, avšak naopak to neplatí. Ne každé kolmé prostory jsou zároveň také totálně kolmé.

PŘÍKLAD 9.4. *Uveďte příklad vektorových podprostorů, které jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé.*

Řešení: Například dvě na sebe kolmé roviny $\rho : x = 0$ a $\sigma : y = 0$ v prostoru V_3 jsou *kolmé*, ale nejsou *totálně kolmé* (součet jejich dimenzí je 4, tj. větší než dimenze „mateřského“ prostoru V_3), viz Obr. 20.

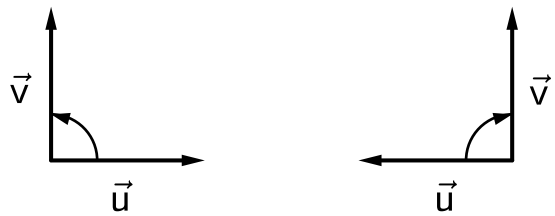


Obrázek 20: Roviny $\rho : x = 0$, $\sigma : y = 0$ jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé

10 Orientace báze vektorového prostoru

Rozlišujeme *pravotočivou* (též *kladnou*) a *levotočivou* (též *zápornou*) bázi vektorového prostoru.

Uvažujme bázi (pro jednoduchost ortonormální) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ prostoru V_2. Jak vidíme na



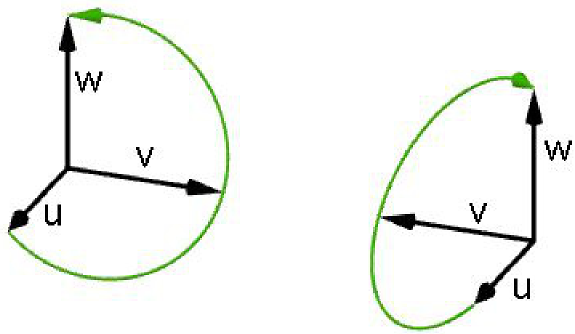
Obrázek 21: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_2

Obr. 21, vektory $\vec{u}, \vec{v}$ můžeme v rovině uspořádat dvěma způsoby, pro které je typické, že chceme-li přejít od jednoho k druhému, nestačí nám vektory pootočit, musíme použít osovou souměrnost. Podle smyslu přechodu od vektoru $\vec{u}$ k vektoru $\vec{v}$ označujeme tyto konfigurace vektorů i jimi tvořené báze jako *pravotočivou* (kladný smysl, Obr. 21, vlevo), respektive *levotočivou* (záporný smysl, Obr. 21, vpravo). Pro pravotočivé báze používáme též označení *kladné báze*, pro levotočivé pak *záporné báze*.

Stejně rozdělujeme báze v trojrozměrném prostoru[1]. Uvažujme bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ vektorového prostoru V_3. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ můžeme opět uspořádat dvěma způsoby, mezi kterými nelze přejít pouhým otočením, ale musíme použít souměrnost podle roviny.

[1]Pojem orientace báze a vektorového prostoru se dá samozřejmě zavést obecně pro vektorové prostory dimenze n, viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 105–107

Konfiguraci, v níž při přechodu mezi vektory v pořadí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ postupujeme v klad-



Obrázek 22: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_3

ném smyslu, nazýváme *pravotočivou* (též *kladnou*) bází (Obr. 22, vlevo), konfiguraci, v níž postupujeme v záporném smyslu, nazýváme *levotočivou* (též *zápornou*) bází (Obr. 22, vpravo).

Vektorový prostor, v němž používáme takto orientované báze, nazýváme *orientovaný vektorový prostor*.

10.1 Matice přechodu mezi dvěma bázemi

Máme-li ve vektorovém prostoru zavedeny dvě báze, můžeme souřadnice vektoru vzhledem k jedné z nich převést na souřadnice tohoto vektoru vzhledem k druhé z nich pomocí tzv. *matice přechodu mezi bázemi*, jak ukazuje následující příklad 10.1.

Každá matice přechodu mezi dvěma bázemi je regulární (proč?) a tak je její determinant různý od nuly. Pokud je kladný, jsou příslušné báze stejně orientované (tj. obě jsou kladné, nebo jsou obě záporné), pokud je determinant matice přechodu záporný, jsou příslušné báze opačně orientované (tj. jedna je kladná a druhá je záporná).

PŘÍKLAD 10.1. *Vektor $\vec{u} \in V_2$ je dán souřadnicemi $\vec{u}_B = (u'_1, u'_2)$ vzhledem k bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_A = (u_1, u_2)$ vzhledem k bázi $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.*

Řešení: Vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ báze B samozřejmě patří do vektorového prostoru V_2, můžeme je proto vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ báze A

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2, \\ \vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2. \end{aligned} \tag{76}$$

Pokud soustavu (76) napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{bmatrix}, \tag{77}$$

figuruje v něm tzv. *matice přechodu of báze A k bázi B*

$$P(A,B) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \tag{78}$$

Vektor $\vec{u}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů obou daných bází

$$\vec{u} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = u_1'\vec{b}_1 + u_2'\vec{b}_2$$

a za vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$ dosadíme výrazy z rovnic (76)

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = u_1'(p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2) + u_2'(p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2).$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = (u_1'p_{11} + u_2'p_{21})\vec{a}_1 + (u_1'p_{12} + u_2'p_{22})\vec{a}_2,$$

v níž porovnáme sobě odpovídající koeficienty u vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ na levé a pravé straně. Výslednou soustavu

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_1'p_{11} + u_2'p_{21} \\ \vec{u}_2 &= u_1'p_{12} + u_2'p_{22} \end{aligned}$$

potom můžeme zapsat maticovou rovnicí, v níž figuruje *matice přechodu od báze A k bázi B* (78)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' & u_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \tag{79}$$

nebo schematicky pomocí daných vektorů

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B \cdot P(A,B). \tag{80}$$

PŘÍKLAD 10.2. *Vektor $\vec{u}$ má vzhledem k bázi $M = \{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3\}$ vektorového prostoru V_3 souřadnice $\vec{u}_M = (2, 1, -3)$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_N$ vzhledem k bázi $N = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, jestliže platí: $\vec{m}_1 = 4\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2 - \vec{n}_3$, $\quad \vec{m}_2 = -3\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + 2\vec{n}_3$, $\quad \vec{m}_3 = -2\vec{n}_1 - 3\vec{n}_2 + 11\vec{n}_3$.*

Řešení: Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \vec{m}_1 &= 4\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2 - \vec{n}_3, \\ \vec{m}_2 &= -3\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + 2\vec{n}_3, \\ \vec{m}_3 &= -2\vec{n}_1 - 3\vec{n}_2 + 11\vec{n}_3 \end{aligned}$$

získáme matici přechodu od báze N k bázi M

$$P(N,M) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix},$$

kterou dle (80) vynásobíme zprava vektor $\vec{u}_M = (2, 1, -3)$, abychom dostali hledané souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi N

$$\vec{u}_N = (2, 1, -3) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix} = (11, 6, -34).$$

PŘÍKLAD 10.3. *Najděte matici přechodu od báze M k bázi N a naopak, od N k M, jestliže $M = \{(1, 1), (0, 2)\}$, $N = \{(2, 1), (1, 2)\}$.*

Řešení: Podle (77) můžeme psát $N = P(M, N) \cdot M$. Po dosazení za M a N tak dostaneme maticovou rovnici $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P(M, N) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, jejímž řešením je matice $P(M, N) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Protože pro matici $P(N, M)$ platí podle (77) rovnice $M = P(N, M) \cdot N$, je zřejmé, že $P(N, M) = P(M, N)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 10.4. *Najděte matice přechodu mezi uvedenými (ortonormálními) bázemi $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ vektorového prostoru V_2.*
a) $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

b) $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

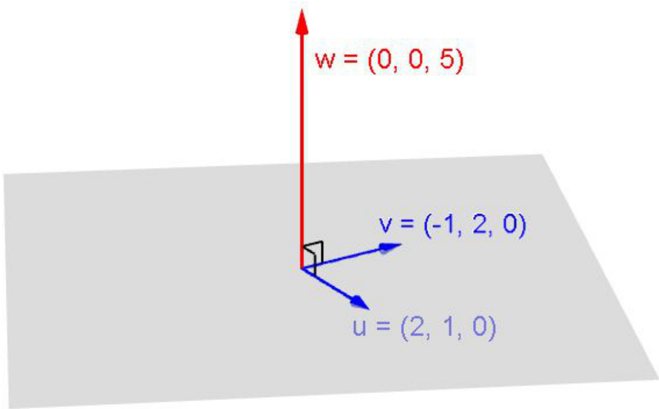
Řešení:
ad a) $P(E, F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F, E) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

ad b) $P(E, F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F, E) = P(E, F)$.

Poznámka. Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je ortogonální. Její determinant je roven 1 (příslušné báze jsou souhlasné) nebo -1 (příslušné báze jsou nesouhlasné).

11 Vektorový součin

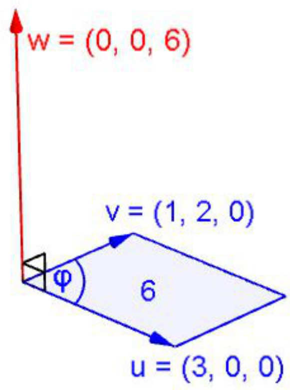
Vektorový součin je operace definovaná ve vektorovém prostoru dimenze 3, do které vstupují dva vektory (tj. binární operace) a jejímž výsledkem je vektor na tyto dva vektory kolmý (viz Obr. 23). Vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ zapisujeme $\vec{u} \times \vec{v}$. Výsledný vektor též nazýváme *vektorový součin*. Zobecněním vektorového součinu



Obrázek 23: Vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

pro prostory dimenze n je tzv. *ortogonální doplněk n-1 vektorů*, operace, do níž vstupuje $n-1$ vektorů a jejímž výsledkem je jeden vektor na všechny tyto vektory kolmý.

Formuli pro výpočet souřadnic vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ odvodíme na základě následujících tří požadovaných vlastností výsledného vektoru (viz Obr. 24):



Obrázek 24: $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi$

i. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý (ortogonální) k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0, \tag{81}$$
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0. \tag{82}$$

ii. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoří spolu s nezávislými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pravotočivou bázi.

iii. Velikost (norma) vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi. \tag{83}$$

Nejprve si uvědomíme, jaké důsledky plynou z uvedených vlastností pro *pravotočivou ortonormální bázi* vektorového prostoru V_3. Uvažujme například *kanonickou bázi* a označme si její vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Protože jsou tyto vektory (i) na sebe kolmé, (ii) tvoří pro nezávislé $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pravotočivou bázi a (iii) obsah rovnoběžníku (čtverce) vymezeného každými dvěma z nich je 1, je zřejmé, že platí:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \tag{84}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \tag{85}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{o},\ \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o},\ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}. \tag{86}$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ nyní vyjádříme pomocí vektorů této ortonormální báze

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}, \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},$$

zapíšeme jejich vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}),$$

který za předpokladu platnosti příslušného distributivního zákona roznásobíme

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} = & u_1v_1\vec{i} \times \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \times \vec{j} + u_1v_3\vec{i} \times \vec{k} + \\ & + u_2v_1\vec{j} \times \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \times \vec{j} + u_2v_3\vec{j} \times \vec{k} + \\ & + u_3v_1\vec{k} \times \vec{i} + u_3v_2\vec{k} \times \vec{j} + u_3v_3\vec{k} \times \vec{k}\end{aligned}$$

a s použitím vztahů (84), (85), (86) zjednodušíme na tvar

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}. \tag{87}$$

Z (87) vyplývá, že vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor, říkejme mu třeba $\vec{w}$, jehož souřadnice vypočítáme ze souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ takto

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{88}$$

Nyní si ověříme, že vektor $\vec{w}$ definovaný (88) skutečně splňuje ony tři výše uvedené požadavky i–iii.

ad i) Ověříme splnění podmínek ortogonálnosti vektorů $\vec{w}$ a $\vec{u}$, resp. $\vec{w}$ a $\vec{v}$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 + u_3v_1u_2 - u_1v_3u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 = 0.$$

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = u_2v_3v_1 - u_3v_2v_1 + u_3v_1v_2 - u_1v_3v_2 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 = 0.$$

ad ii) Pro ověření, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ tvoří kladnou bázi dosadíme za $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vektory kanonické báze $\vec{i} = (1,0,0)$ a $\vec{j} = (0,1,0)$. Podle (88) je potom $\vec{i}\times\vec{j} = (0,0,1) = \vec{k}$. Vektorový součin skutečně tvoří spolu s danými dvěma vektory kladnou bázi.

ad iii) To, že vektor $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ definovaný vztahem (88) má normu $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi$, prokážeme dosazením souřadnic příslušných vektorů. Před tím však ještě obě strany této rovnosti umocníme na druhou

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\varphi,$$

a vhodnou úpravou s využitím vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů se zbavíme goniometrické funkce sin

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\varphi),$$
$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\varphi,$$
$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2. \tag{89}$$

Únavné výpočty při dosazení souřadnic vektorů do poslední rovnosti a ověření její platnosti provedeme v programu wxMaxima.
Nejprve načteme balíček funkcí „vect“ pro počítání s vektory a zadáme souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (vektorový součin je v Maximě reprezentován symbolem $\sim$, výsledek, jak vidíme, odpovídá formuli (88))

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) u:[u1,u2,u3]; v:[v1,v2,v3]; w:express(u~v);
```

(%o2) $[u1, u2, u3]$
(%o3) $[v1, v2, v3]$
(%o4) $[u2\,v3 - u3\,v2, u3\,v1 - u1\,v3, u1\,v2 - u2\,v1]$

Poté zapíšeme vztah (89) a odečtením porovnáme její levou a pravou stranu.

```
(%i5) Rovnice:(w.w)=(u.u)*(v.v)-(u.v)^2;
```

(%o5) $(u2\,v3 - u3\,v2)^2 + (u3\,v1 - u1\,v3)^2 + (u1\,v2 - u2\,v1)^2 =$
$(u3^2 + u2^2 + u1^2)\,(v3^2 + v2^2 + v1^2) - (u3\,v3 + u2\,v2 + u1\,v1)^2$

```
(%i6) expand(lhs(Rovnice)-rhs(Rovnice));
```

(%o6) 0

Výsledek 0 znamená, že se obě strany (89) rovnají. Platnost vztahu (83) pro vektor $\vec{w}$ definovaný formulí (88) je tím prokázána.

11.1 Výpočet vektorového součinu

Víme, že vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor, jehož souřadnice jsou dány vztahem (viz též (88))

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{90}$$

Není však nutné si tento vztah pamatovat a souřadnice vektorového součinu počítat dosazením do něj. Ukážeme si zde některé jednodušší způsoby jejich výpočtu. Začneme tím, že si všimneme, že výrazy pro jednotlivé souřadnice vektorového součinu v (90) se dají zapsat ve formě determinantů matic řádu 2, které obsahují souřadnice daných vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{91}$$

Po rozepsání pomocí vektorů kanonické báze dostaneme rovnost

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \tag{92}$$

jejíž pravou stranu můžeme interpretovat jako rozvoj determinantu $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$ podle posledního řádku. Zápis vektorového součinu vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve formě tohoto determinantu se snáze pamatuje a přináší i podstatné zjednodušení výpočtu jeho souřadnic

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}. \tag{93}$$

Buď pracujeme přímo s determinantem (93), nebo využijeme některý odvozený algoritmus. Jako například ten následující. Souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ napíšeme pod sebe jako řádky matice (není nutné psát závorky), za kterou ještě připíšeme její první dva sloupce

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix} \tag{94}$$

V tomto schématu potom postupně na vybrané dvojice sloupců (2. a 3., 3. a 4., 4. a 5.) uplatňujeme *křížové pravidlo* a počítáme souřadnice vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{array}{c|cc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_2v_3 - u_3v_2,$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_3v_1 - u_1v_3,$$

$$\begin{array}{ccc|cc|} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_1v_2 - u_2v_1.$$

11.2 Vlastnosti vektorového součinu

Většinu vlastností vektorového součinu již známe. Zde si je souhrnně zopakujeme a přidáme několik dalších.

(1) Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$; $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$.

(2) Nezávislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvoří spolu s vektorovým součinem $\vec{u} \times \vec{v}$ pravotočivou[1] (kladnou) bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$. Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ závislé, je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.

(3) Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ není komutativní; $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

(4) Distributivnost vzhledem ke sčítání vektorů; $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

(5) Asociativnost vzhledem k násobení skalárem; $(c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v}) = c(\vec{u} \times \vec{v})$

(6) Velikost (norma) vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$;

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi. \tag{95}$$

Dle (89) platí pro druhou mocninu normy vektorového součinu

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}, \tag{96}$$

kde $\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je tzv. *Gramův determinant* vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Vztah $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je potom speciálním případem tzv. *Lagrangeovy identity*[2]

11.3 Užití vektorového součinu

S různými aplikacemi vektorového součinu se budeme setkávat v dalších partiích této publikace. Zde si uvedeme dva příklady - výpočet obecné rovnice roviny dané jedním bodem a dvěma nezávislými vektory a výpočet obsahu trojúhelníku daného souřadnicemi jeho vrcholů.

PŘÍKLAD 11.1. *Rovina ρ je dána bodem $A = [-3, 2, 1]$ a dvěma nezávislými vektory $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ a $\vec{v} = (-1, -3, 2)$, určete její obecnou rovnici.*

[1] Tato skutečnost nám dovoluje určit směr vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ pomocí *pravidla pravé ruky*: Pravou ruku umístíme malíkovou hranou do roviny vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ tak, aby směr prstů odpovídal pořadí, v němž je násobíme (v případě $\vec{u} \times \vec{v}$ směřují od $\vec{u}$ k $\vec{v}$), potom má vztyčený palec směr vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$.

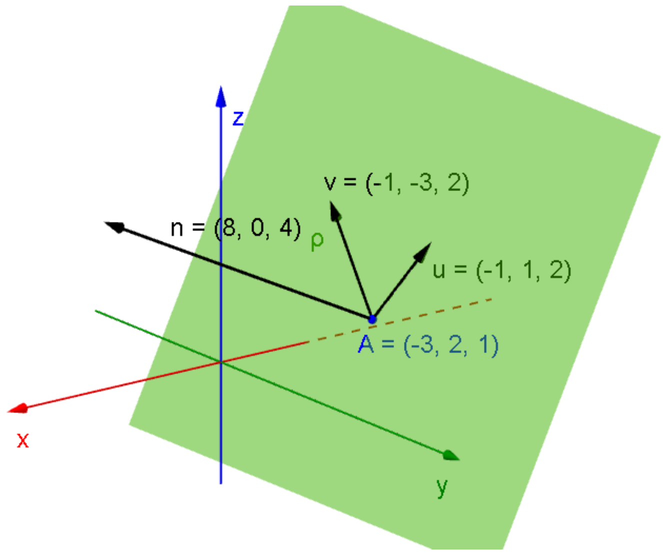
[2] Viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 114–115.

Řešení: Obecná rovnice roviny má tvar $ax + by + cz + d = 0$, kde (a, b, c) jsou souřadnice vektoru kolmého k této rovině, říkáme mu normálový vektor a značíme ho $\vec{n}$. K vyřešení příkladu tak stačí najít jakýkoliv normálový vektor roviny ρ, použít jeho souřadnice jako koeficienty a, b, c v obecné rovnici $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$, dosadit za x, y, z souřadnice bodu A a dopočítat hodnotu koeficientu d.

Vzhledem k vlastnostem vektorového součinu použijeme jako normálový vektor roviny ρ vektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, 3) \times (7, -1, 2) = (8, 0, 4).$$

(viz Obr. 25). Rovina ρ je tedy dána rovnicí ve tvaru $8x + 4z + d = 0$, kde d



Obrázek 25: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (8, 0, 4)$

dopočítáme po dosazení souřadnic A. Z příslušné rovnice $8 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + d = 0$ dostáváme $d = 20$. Odpovídající rovnici $8x + 4z + 20 = 0$ potom můžeme ještě vydělit 4 a dostaneme základní tvar obecné rovnice roviny $\rho: \ 2x + z + 5 = 0$.

Poznámka. U normálového vektoru nám jde o jeho směr, nikoliv velikost. Proto jsme mohli dělit 4 již souřadnice vektoru $\vec{u} \times \vec{v} = (8, 0, 4)$ a nadále pracovat s vektorem $\vec{n} = (2, 0, 1)$.

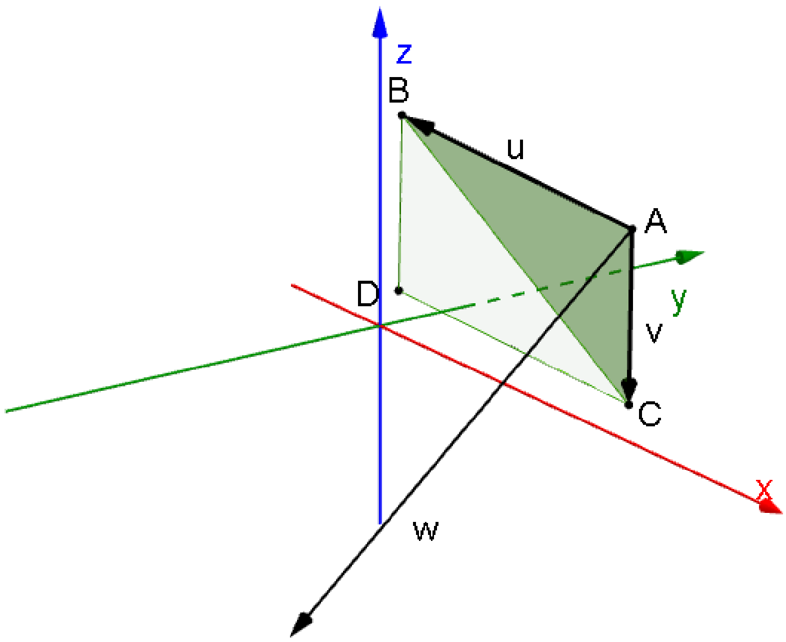
PŘÍKLAD 11.2. *Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC s vrcholy $A = [7, 3, 4]$, $B = [1, 0, 6]$, $C = [4, 5, -2]$.*

Řešení: Velikost (norma) vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku, který je vymezen vektory $\vec{u}, \vec{v}$

$$S_{\Diamond} = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Potom obsah trojúhelníku ABC spočítáme jako polovinu velikosti vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$ (viz Obr. 26)

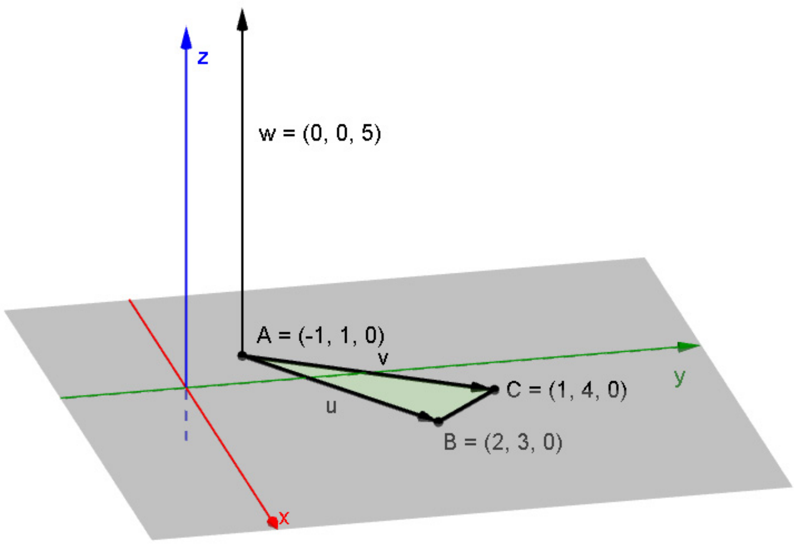
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|(-6, -3, 2) \times (-3, 2, -6)| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = 24,5.$$



Obrázek 26: Obsah trojúhelníku ABC je roven $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

PŘÍKLAD 11.3. *Vypočtěte obsah trojúhelníku* ABC; $A = [-1, 1], B = [2, 3], C = [1, 4]$.

Řešení: Pro řešení tohoto úkolu je nejsnazší použít *vnější součin* (též *smíšený součin*), jak uvidíme v kapitole 12. Výpočet pomocí vektorového součinu však není nijak obtížný a navíc se ukáže, že oba postupy spolu souvisejí. Rovinu, v níž se nachází



Obrázek 27: Obsah trojúhelníku ABC je roven $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

daný trojúhelník jednoduše chápeme jako podprostor bodového prostoru dimenze 3. Tento přechod do prostoru vyšší dimenze nejjednodušeji vyřešíme tak, že rovinu ABC ztotožníme se souřadnicovou rovinou xy, tj. souřadnice daných bodů změníme z uspořádaných dvojic na trojice přidáním 0 jako třetí složky; $A = [-1, 1, 0], B =$

$[2,3,0], C=[1,4,0]$ (viz Obr. 27). Potom k výpočtu obsahu trojúhelníku ABC použijeme vektorový součin stejně jako při řešení příkladu 11.2. Obsah trojúhelníku ABC vyjde $2,5$.

11.4 Ortogonální doplněk *n-1* vektorů v prostoru V_n

Zobecněním vektorového součinu do prostoru V_n je *ortogonální doplněk* $n-1$ *vektorů.* Tímto pojmem rozumíme *jeden vektor*, který je kolmý ke všem daným $n-1$ vektorům z V_n. Vektorový součin bychom tedy mohli nazývat také *ortogonální doplněk 2 vektorů* v prostoru V_3.

K zobecnění vektorového součinu do prostoru dimenze n použijeme jeho zápis (93) ve formě determinantu.

Definice 22 (Ortogonální doplněk n-1 vektorů)**.** *Ortogonálním doplňkem* $n-1$ *vektorů* $\vec{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}), i=1,2,\ldots,n-1$, *jejichž souřadnice jsou udány vzhledem k ortonormální bázi* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ *vektorového prostoru* V_n, *nazýváme vektor, který je výsledkem rozvoje determinantu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{vmatrix} \tag{97}$$

podle $n-$*tého řádku. Značíme ho*

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1}.$$

Poznámka. Podle definice 22 a podle věty o rozvoji determinantu[1] pro ortogonální doplněk $n-1$ vektorů $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ platí

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{vmatrix} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + \ldots + A_n\vec{e}_n.$$

Potom ale můžeme říci, že ortogonální doplněk uvedených $n-1$ vektorů je vektor, jehož složkami jsou algebraické doplňky prvků posledního řádku determinantu (97)

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)\,.$$

[1] Dle věty o rozvoji determinantu je $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{jk} = \delta_{ij}\cdot \det A$, $i,j=1,2,\ldots,n$, kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí, že $\delta_{ij}=1$ pro $i=j$ a $\delta_{ij}=0$ pro $i\neq j$.

11.5 Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů

Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů[1] jsou analogické vlastnostem vektorového součinu, které jsou uvedeny na straně 87.

(1) Ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}$ je kolmý k vektorům $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$.

(2) Pro vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}\}$ kladnou bázi V_n.

(3) Pro vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně závislé je $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = \vec{o}$.

(4) Prohozením pořadí dvou vektorů se ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}$ mění na opačný.

(5) $$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2^2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-2}\vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix} = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}),$$

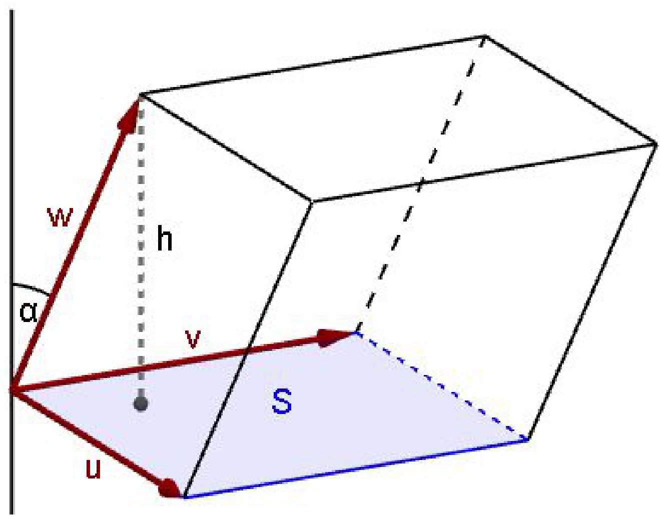
kde $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1})$ je Gramův determinant.

[1] Více o těchto vlastnostech viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 106–111.

12 Vnější součin

Vnější součin, též *smíšený součin*, je ve vektorovém prostoru dimenze 3 operací, do které vstupují tři vektory (tj. ternární operace) a jejímž výsledkem je číslo. Absolutní hodnota tohoto čísla je přitom rovna objemu rovnoběžnostěnu vymezeného danými třemi vektory. Protože lze vnější součin v prostoru dimenze 3 interpretovat jako spojení vektorového a skalárního součinu, říká se mu též *smíšený součin*. Vnější součin lze zobecnit do vektorového prostoru dimenze n.

Vztah pro výpočet vnějšího součinu odvodíme jako řešení úkolu *vypočítat objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, viz Obr. 28. Je zřejmé, že objem V



Obrázek 28: Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

tohoto rovnoběžnostěnu je dán vztahem $V = S \cdot h$, kde $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ a $h = |\vec{w}| \cos \alpha$, tj.

$$V = S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha.$$

Protože podle (25) je $|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \varphi = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, můžeme objem uvažovaného rovnoběžnostěnu vyjádřit vztahem

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}. \tag{98}$$

Tento vztah, který nabízí vysvětlení, proč se vnějšímu součinu říká také *smíšený součin*, dále upravíme. Pokud za $\vec{u} \times \vec{v}$ dosadíme podle (91) a poté aplikujeme větu o rozvoji determinantu (viz poznámka pod čarou na str. 90), dostaneme postupně

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Vidíme tedy, že objem rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory na Obr. 28 je roven determinantu, jehož řádky tvoří tyto vektory. V obecném případě, kdy nemáme zaručeno, že úhel α je ostrý, uvažujeme absolutní hodnotu tohoto determinantu

$$V = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\| . \tag{99}$$

Operaci, která třem vektorům $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, daným souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vzhledem k ortonormální bázi V_3, přiřadí hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{100}$$

případně výrazu

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}, \tag{101}$$

který je s ním ekvivalentní, nazýváme *vnější součin* (též *smíšený součin*) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, značíme

$$[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}].$$

12.1 Vlastnosti vnějšího součinu

(1) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}] = -[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$.

(2) Pro $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležící v jedné rovině (tj. *komplanární*) je $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$.

Uvedené vlastnosti lze snadno dokázat použitím zápisu vnějšího součinu ve formě determinantu

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

12.2 Užití vnějšího součinu

12.2.1 Objem rovnoběžnostěnu

PŘÍKLAD 12.1. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, jejichž souřadnice vyhledem ke kanonické bázi vektorového prostoru V_3 jsou $\vec{u} = (2, -1, 0)$,*

$\vec{v} = (3, 0, 2)$, $\vec{w} = (1, 1, 5)$.

Řešení: Dle (99) pro objem daného rovnboběžnostěnu platí

$$V = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right\| = 9. \tag{102}$$

12.2.2 Obsah rovnoběžníku/trojúhelníku v rovině

V řešení příkladů 11.2, 11.3 jsme si ukázali, jak lze k výpočtu obsahu rovnoběžníku či trojúhelníku využít vektorový součin, nejenom v prostoru dimenze 3, ale i v rovině. V případě roviny stačilo přidat jako třetí souřadnici nulu. Nyní si ukážeme, jak tento postup souvisí s *vnějším součinem*.

Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Pokud jejich souřadnice upravíme ne tvar $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ můžeme obsah rovnoběžníku, který je jimi určen, vyjádřit vztahem

$$S_\Diamond = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Protože pro vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ platí

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{array} \right| = (0, 0, \left| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right|),$$

je zřejmé, že obsah uvažovaného rovnoběžníku lze vyjádřit také ve tvaru

$$S_\Diamond = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left\| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right\|,$$

kde determinant $\left| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right|$ můžeme dle (100) chápat jako zápis vnějšího součinu $[\vec{u}\ \vec{v}]$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Potom ovšem můžeme psát

$$S_\Diamond = |[\vec{u}\ \vec{v}]|.$$

Pojem vnějšího součinu tak můžeme použít i v rovině, tj. pro dva vektory o dvou složkách. Jeho absolutní hodnotu potom interpretujeme jako obsah rovnoběžníku těmito vektory omezeného.

Pro obsah příslušného trojúhelníku pak platí

$$S_\triangle = \frac{1}{2} S_\Diamond = \frac{1}{2} |[\vec{u}\ \vec{v}]| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right\|.$$

Můžeme ovšem použít i zápis, v němž figurují přímo souřadnice bodů - vrcholů trojúhelníku, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ platí

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{array} \right\|. \tag{103}$$

Případně můžeme použít ekvivalentní tvar, v němž nefigurují rozdíly souřadnic daných bodů

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\|. \tag{104}$$

Analogické vyjádření bychom dostali i pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru dimenze 3. Dostáváme tak následující snadno zapamatovatelné vztahy:

(1) *Obsah rovnoběžníku určeného body A, B, C*

$A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$:

$$S = \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{array} \right\|. \tag{105}$$

(2) *Objem rovnoběžnostěnu určeného body A, B, C, D*

$A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$:

$$V = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{array} \right\|. \tag{106}$$

PŘÍKLAD 12.2. *Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, je-li dáno: $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.*

Řešení: Použijeme (103) (můžeme ovšem použít také (104))

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right\| = 6.$$

12.2.3 Rovnice roviny určené třemi body A, B, C

Vnější součin můžeme využít k elegantnímu zápisu obecné rovnice roviny dané třemi nekolineárními body, například A, B, C (viz Obr. 29). Využijeme skutečnosti, že právě jenom pro bod X náležející rovině ABC je objem rovnoběžnostěnu určeného trojicí vektorů $B - A$, $C - A$, $X - A$ roven nule. Obecnou rovnici roviny ABC tak můžeme zapsat ve tvaru

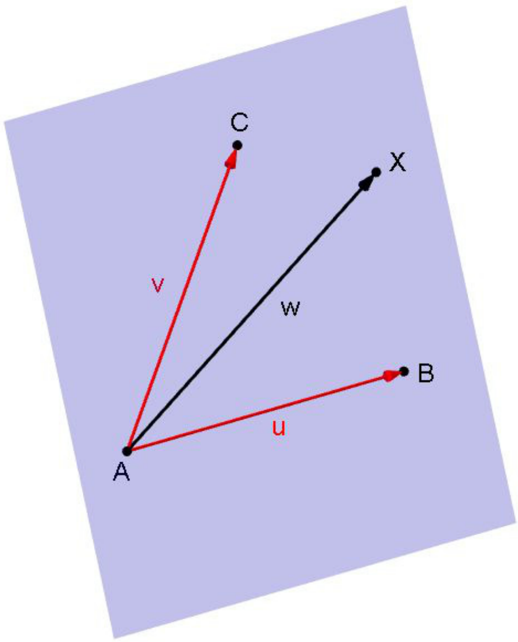
$$[(X - A)(B - A)(C - A)] = 0, \tag{107}$$

nebo pomocí determinantu obsahujícího souřadnice bodů X, A, B, C

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

případně souřadnice příslušných vektorů $X - A, B - A, C - A$

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Obrázek 29: Vektory $X - A, B - A, C - A$ jsou lineárně závislé

12.3 Vnější součin v prostoru V_n

Definice 23 (Vnější součin). *Vnějším součinem*[1] *vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$, které jsou dány souřadnicemi $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = 1, 2, ..., n$, vzhledem k ortonormální bázi, nazýváme determinant*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Značíme ho

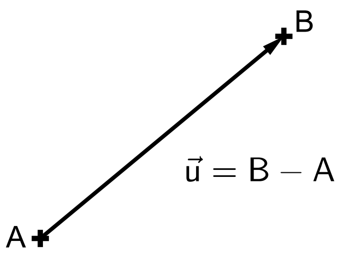
$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n].$$

[1]Pro další studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 117–125

13 Afinní bodový prostor

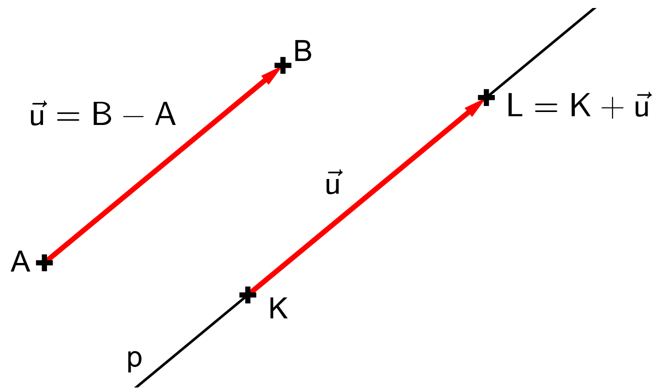
Pojem *afinní bodový prostor*[1] představuje zobecnění pojmů *rovina* (tj. dvojrozměrný bodový prostor) a *prostor* (tj. trojrozměrný bodový prostor), které známe z planimetrie, stereometrie a analytické geometrie.

Prvky afinního bodového prostoru nazýváme *body*. Klíčovou vlastností afinního bodového prostoru je, že každými dvěma jeho body je určen vektor, který je dán jejich rozdílem, viz Obr. 30.



Obrázek 30: Dvěma body A, B je určen vektor $\vec{u}$

Díky této vlastnosti můžeme vyjádřit bod v afinním bodovém prostoru jako součet jiného bodu a vektoru, viz Obr. 31.



Obrázek 31: Součtem bodu K a vektoru $\vec{u}$ je bod L

Uvedené skutečnosti nám dovolují zavést v afinním bodovém prostoru souřadnice, popisovat jeho podmnožiny a zkoumat vztahy[2] mezi nimi. Těmto otázkám se budeme podrobně věnovat v následujících partiích textu. Zde si jenom pro příklad uveďme *parametrickou rovnici přímky*, jejíž zavedení přímo vyplývá z popisované souvislosti mezi dvojicí bodů a vektorem.

Uvažujme přímku p z Obr. 31, která je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{u}$. Stejně jako jsme zapsali bod L součtem $L + \vec{u}$, můžeme vyjádřit každý bod X

[1] *Affinis* znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil *Leonhard Euler* (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělící poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. *Afinní geometrií* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

[2] V prostém afinním bodovém prostoru neumíme měřit vzdálenosti a úhly. To je umožněno až zavedením skalárního součinu v příslušném vektorovém prostoru (říkáme mu *zaměření* bodového prostoru). Potom hovoříme o *Eukleidovském bodovém prostoru.*

přímky p součtem $L + \vec{x}$, kde $\vec{x} = t\vec{u}$, $t \in R$. Tak dostáváme *parametrickou rovnici* (též *parametrické vyjádření*) *přímky* p:

$$X = K + t\vec{u};\ t \in R. \tag{108}$$

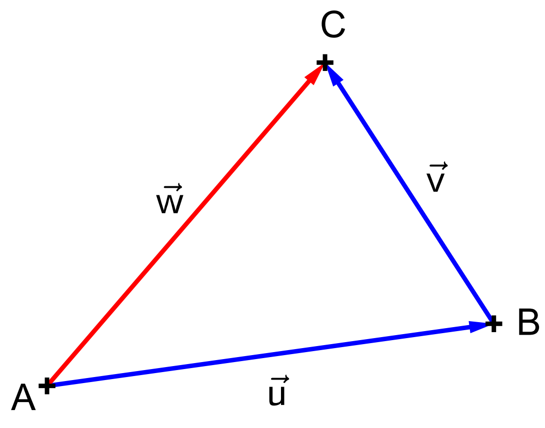
13.1 Definice afinního bodového prostoru

Skutečnost, že každými dvěma body je určen vektor, nám umožňuje při definici afinního bodového prostoru využít axiomů definujících vektorový prostor.

Přiřazení vektoru $\vec{u}$ z prostoru V_n dvojici bodů A, B z afinního bodového prostoru A_n popíšeme pomocí zobrazení $g : A_n \times A_n \to V$, kde

$$g(A, B) = \vec{u} = B - A. \tag{109}$$

V souvislosti se zobrazením (109) se v afinním bodovém prostoru setkáme se dvěma „novými“ operacemi: (i) *Odčítání bodů*, jehož výsledkem je vektor, $\vec{u} = B - A$. (ii) *Sčítání bodu a vektoru*, jehož výsledkem je bod, $B = A + \vec{u}$.



Obrázek 32: $(B - A) + (C - B) = (C - A)$

Při definování afinního bodového prostoru požadujeme, aby zobrazení (109) mělo s ohledem na uvedené operace vlastnost, kterou ilustruje Obr. 32. Pro trojúhelník ABC platí $B - A = \vec{u}$, $C - B = \vec{v}$, $C - A = \vec{w}$, $A + \vec{u} = B$, $B + \vec{v} = C$, $A + \vec{w} = C$. Potom můžeme psát

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{w} = C.$$

Pro vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ by tak měla platit rovnost $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, kterou můžeme přepsat pomocí zobrazení (109) takto

$$g(A, B) + g(B, C) = g(A, C).$$

Jedná se o tzv. *Chaslesův vztah* a jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru[1].

[1] Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 15.

Definice 24 (Afinní bodový prostor). *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení $g: \ A_n \times A_n \to V$ těchto vlastností:*

1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{(též zapisujeme jako } B - A = \vec{x}\text{)}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme (vektorovým) zaměřením afinního bodového prostoru A_n.

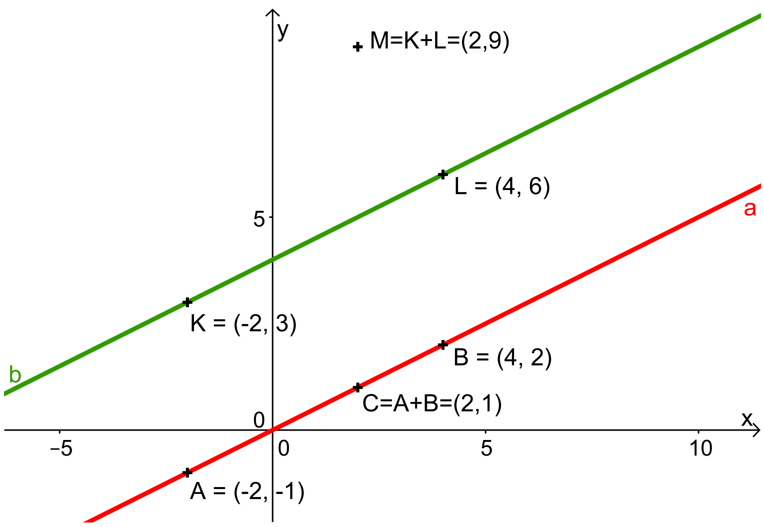
Příklady afinního bodového prostoru

(1) *Bod*, tj. jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$, je *afinní bodový prostor dimenze 0*.

(2) *Přímka* je *afinním bodovým prostorem dimenze 1* se zaměřením $V_1 = [\vec{u}]$, kde $\vec{u}$ je jejím směrovým vektorem.

(3) *Vektorový prostor V_n je afinním bodovým prostorem dimenze n*. Zobrazení (109) je v tomto případě definováno vztahem $g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$.

Poznámka. Možná překvapivá informace v příkladu (3), že vektorový prostor je zároveň i afinním bodovým prostorem, vychází ze skutečnosti, že vektorový prostor automaticky splňuje definici 24 (Vyzkoušejte!). Obráceně to však neplatí! Nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem. Jak ilustruje Obr. 33, na němž jsou znázorněny dvě přímky a a b, které jsou obě afinními bodovými



Obrázek 33: $C = A + B \in a$, $M = K + L \notin b$

(pod)prostory. Přitom jenom přímka a je zároveň i vektorovým (pod)prostorem.

Vidíme, že přímka b neobsahuje nulový vektor (tj. bod $[0, 0]$, viz *nutná podmínka existence vektorového podprostoru* na str. 41), naplatí pro ni ani požadavek, že součet jejích prvků (bodů) je opět jejím prvkem (bodem) (viz definice 3 a věta 10).

Poznámky.
1. Afinní bodový prostor A_n zapisujeme také jako

$$A_n = (A, V_n, g),$$

kde A je množina bodů, V_n je vektorové zaměření vektorového prostoru a g je zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$.

2. Afinní bodový prostor A_n nazýváme plným jménem „afinní bodový prostor nad tělesem T," kde T odpovídá tělesu, nad nímž je definováno zaměření V_n.

PŘÍKLAD 13.1. *Rozhodněte, zda je množina (P, V, g) s níže uvedenými specifikacemi afinním bodovým prostorem.*
a) $P = R^3,\ V = \{(x_1, x_2, x_3); x_1, x_2, x_3 \in R\},\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$,
b) $P = R^3,\ V = \{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in R\},\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, 0)$.

Řešení:
ad a) Jedná se o afinní bodový prostor.

ad b) Nejedná se o afinní bodový prostor. Problém je s vektorovým prostorem V. Z definice 24 není splněn požadavek „Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že $g(A, B) = \vec{x}$". Například pro bod $A = (2, 3, 7)$ a vektor $\vec{x} = (1, 2, 0)$ existuje nekonečně mnoho bodů $B = (3, 5, k), k \in R$, pro které je $\vec{x} = B - A$.

PŘÍKLAD 13.2. *Označme M množinu všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ a W_A vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = o$. Dokažte, že množina M je afinním bodovým prostorem se zaměřením W_A.*

Řešení: Nejprve definujeme zobrazení $g: M \times M \to W_A$. Pro $x_1, x_2 \in M$ zřejmě platí $Ax_1 = b$ a $Ax_2 = b$. Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme $A(x_2 - x_1) = \vec{o}$, tj. $u = x_2 - x_1 \in W_A$. Zobrazení g tak můžeme definovat vztahem $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Ověření, že (M, W_A, g) splňuje definici 24 a je tedy afinním bodovým prostorem přenecháváme čtenáři, postup je zřejmý.

Cvičení – Afinní bodový prostor

1. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$, kde $K = [1,3]$, $L = [-1,9]$, $M = [-2,-4]$, $N = [0,-10]$, je rovnoběžník. Spočítejte jeho obsah.

2. V rovině $\mathbb{E}_2$ jsou dány body $K = [2,-2]$, $L = [-1,0]$, $M = [0,3]$. Určete bod $N \in \mathbb{E}_2$ tak, aby čtyřúhelník $KLMN$ byl rovnoběžník. Spočítejte jeho obsah.

3. Body $A = [-1,2]$ a $B = [4,0]$ jsou dva sousední vrcholy rovnoběžníku v $\mathbb{E}_2$, jehož střed je v bodě $S = [2,2]$. Najděte souřadnice zbývajících dvou vrcholů. Spočítejte obsah tohoto rovnoběžníku.

4. Body $A = [1,2]$ a $C = [3,8]$ jsou protilehlé vrcholy čtverce $ABCD$. Určete souřadnice jeho zbývajících vrcholů B, D.

5. Zjistěte, zda body $A = [3,5,8]$, $B = [-7,-3,10]$, $C = [8,9,7]$ leží na jedné přímce. Pokud ano, napište její parametrické rovnice.

6. Dokažte, že body $A = [2,1,1]$, $B = [5,5,6]$, $C = [6,11,14]$, $D = [3,7,9]$ jsou vrcholy rovnoběžníka.

7. Určete vrcholy trojúhelníka, jsou-li dány středy $A' = [-2,1]$, $B' = [3,-1]$, $C' = [1,5]$ jeho stran. Vypočtěte jeho obsah.

8. Vrcholem C trojúhelníku ABC veďte rovnoběžku se stranou AB; $A = [-2,1], B = [3,-1], C = [0,4]$.

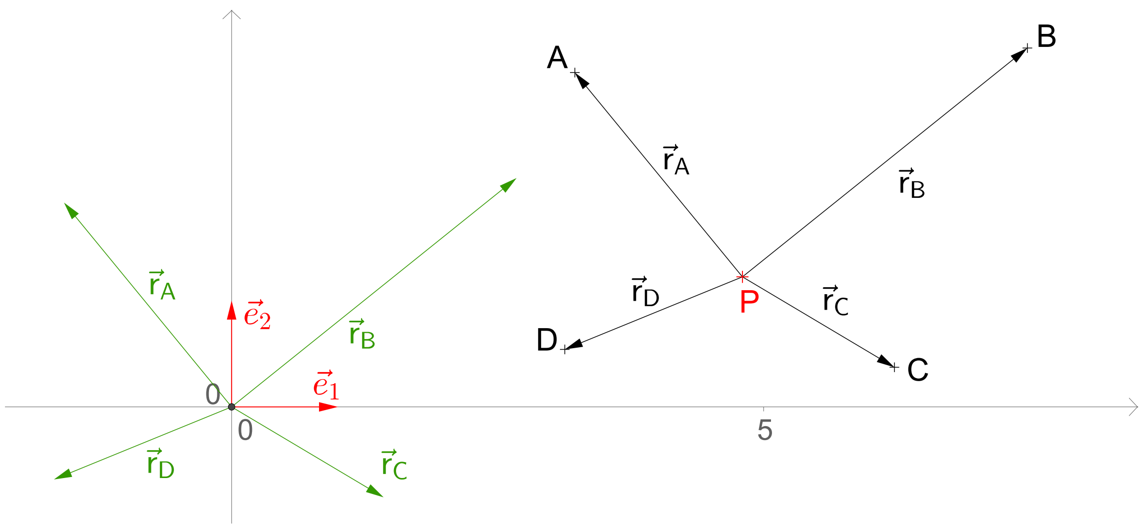
9. Bodem V veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou $\sigma = (KLM)$; $K = [0,4,-3], L = [3,1,5], M = [-2,0,0], V = [1,-2,-3]$.

13.2 Afinní souřadnice bodů

Zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$ (109) zprostředkovává vztah mezi afinním bodovým prostorem A_n a příslušným vektorovým prostorem V, jeho zaměřením. Dvěma různým bodům je přiřazen vektor a naopak, bodu a vektoru je přiřazen bod. Kdyby toto zobrazení bylo vzájemně jednoznačné, mohli bychom ho využít k zavedení souřadnic v bodovém prostoru – bodům bychom přiřadili stejné souřadnice, jaké by měly jim odpovídající vektory. Bohužel tomu tak ale není, existuje nekonečně mnoho různých dvojic bodů, kterým je přiřazen stejný vektor.

Naštěstí je snadné tuto nejednoznačnost odstranit. Stačí zvolit jeden bod jako pevný, označme ho P, a každému bodu X bodového prostoru přiřadit vektor $g(P, X) = X - P$. Jak ilustruje Obr. 34, toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, dvěma různým bodům jsou přiřazeny dva různé vektory a každému vektoru odpovídá právě jeden bod:

$$
\begin{aligned}
A - P = \vec{r}_A &\quad\longrightarrow\quad A = P + \vec{r}_A,\\
B - P = \vec{r}_B &\quad\longrightarrow\quad B = P + \vec{r}_B,\\
C - P = \vec{r}_C &\quad\longrightarrow\quad C = P + \vec{r}_C,\\
D - P = \vec{r}_D &\quad\longrightarrow\quad D = P + \vec{r}_D.
\end{aligned}
$$



Obrázek 34: Zavedení afinní soustavy souřadnic (repéru)

Potom skutečně mohu každý bod bodového prostoru jednoznačně určit pomocí souřadnic příslušného vektoru (které udávám vzhledem k bázi zaměření V_n).

Poznámka. Vektor $\vec{r} = X - P$ nazýváme *radiusvektor* (též *průvodič*) bodu X. Viz vektory $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ na Obr. 34.

Definice 25 (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$ a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n. Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$. Bod P nazýváme počátek soustavy souřadnic.

Souřadnice bodu X vzhledem k repéru $\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ jsou tedy totožné se souřadnicemi vektoru $X - P$ vzhledem k bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ vektorového zaměření V_n. Jestliže $X - P = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, můžeme bod $P \in A_n$ zapsat rovnicí

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n, \tag{110}$$

případně ve zkráceném tvaru

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \tag{111}$$

a souřadnice bodu P zapíšeme

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\,. \tag{112}$$

Na vztahu (110) (příp. (111)) je založena definice *parametrického vyjádření afinního bodového prostoru a podprostoru*, významného prostředku matematického popisu těchto množin.

Poznámky.
1. Prostor se soustavou souřadnic φ zapisujeme:

$$A_n = [P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]\,.$$

2. Souřadnice bodů a vektorů někdy odlišujeme typem závorek

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \quad \text{ale} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

3. Souřadnice bodu a jeho radiusvektoru jsou stejné.

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{a} \quad \vec{r}_A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,.$$

4. Protože $P - P = (0, 0, \ldots, 0)$, počátek afinní soustavy souřadnic má souřadnice

$$P = [0, 0, \ldots, 0]\,.$$

PŘÍKLAD 13.3. *V afinní rovině A_2 je dán repér $\mathcal{R} = \{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Pro bod A platí $A = P - \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Určete jeho souřadnice vzhledem k $\mathcal{R}$.*

Řešení: Souřadnice bodu A vzhledem k repéru $\mathcal{R}$ jsou $A = [-1; 2]$.

13.3 Kartézská soustava souřadnic

Afinní bodový prostor na jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin nazýváme *Eukleidovský bodový prostor* a značíme ho E_n. V takovém bodovém prostoru můžeme zavést soustavu souřadnic (repér) $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, jejíž báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je ortonormální. Takovou soustavu nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic.*

Definice 26 (Kartézská soustava souřadnic)**.** *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic* $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$*, ve které* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ *je ortonormální bází.*

14 Afinní bodový podprostor

Ze všech možných podmnožin afinního bodového prostoru nás budou zajímat jenom takové, které samy splňují definici afinního bodového prostoru, budeme jim říkat *afinní bodové podprostory* (srovnejte se zavedením pojmu *vektorový podprostor* na str. 41).

Definice 27 (Afinní bodový podprostor)**.** *Neprázdnou podmnožinu* A_k *afinního bodového prostoru* A_n*, která je sama afinním bodovým prostorem (viz definice 24), nazýváme afinním bodovým podprostorem prostoru* A_n*. Zapisujeme*

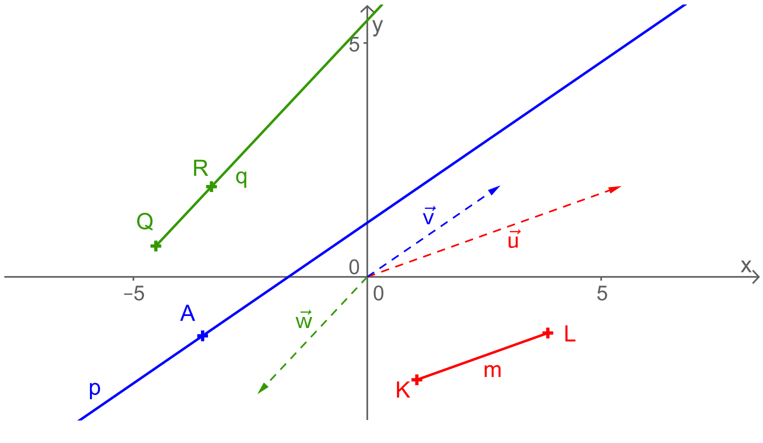
$$A_k \subseteq\subseteq A_n.$$

Příklady afinních bodových podprostorů

(1) Samotný *afinní bodový prostor* A_n je svým podprostorem, $A_n \subseteq\subseteq A_n$.

(2) *Bod* (A_0), *přímka* (A_1), *rovina* (A_2) jsou typické podprostory prostorů A_2, A_3, kterými se budeme zabývat.

PŘÍKLAD 14.1. *Může být polopřímka, úsečka, polorovina, kruh nebo trojúhelník bodovým podprostorem prostoru* A_2*?*



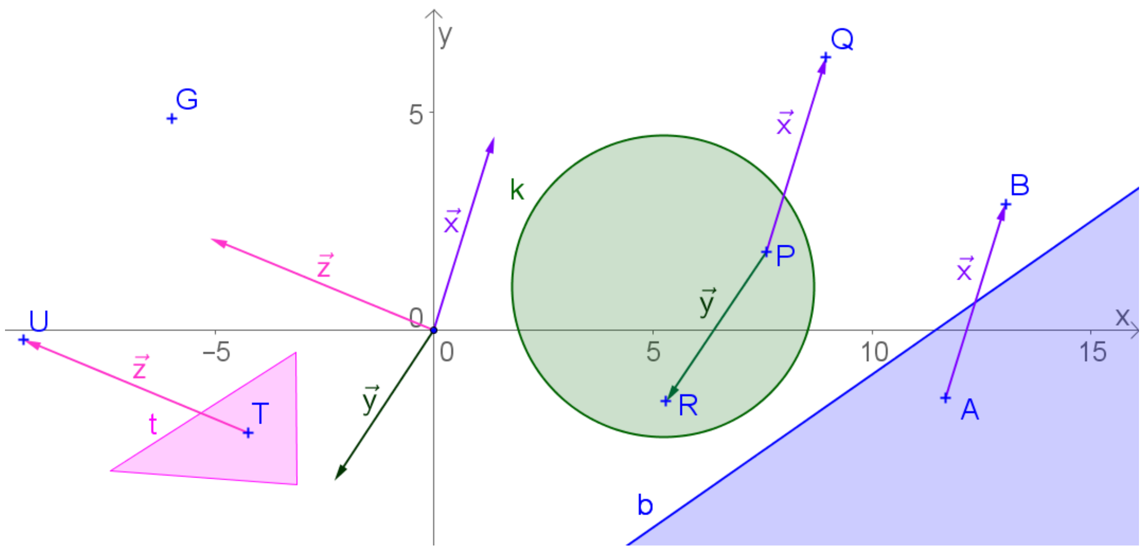
Obrázek 35: Je polopřímka q nebo úsečka m afinním bodovým podprostorem?

Řešení: Nejprve se zaměříme na polopřímku a úsečku, viz Obr. 35. Protože se jedná o části přímky, budeme jako jejich případná zaměření uvažovat vektorové prostory generované směrovými vektory odpovídajících přímek. V případě polopřímky $q = \overrightarrow{QR}$ uvažujeme vektorový prostor $U = [\vec{w}]$, v případě úsečky m pak vektorový prostor $V = [\vec{u}]$.

Nyní ověříme, jak polopřímka a úsečka jako množiny bodů splňují definici 24. Nemusíme se zabývat otázkou existence zobrazení $g : A_k \times A_k \to V$. Ta je zaručena skutečností, že vyšetřované množiny jsou podmnožinami afinního bodového prostoru A_2. Stejně tak vlastnost *2* z definice je zřejmě splněna. Soustředíme se proto na vlastnost *1*.

Z Obr. 35 je evidentní, že pro polopřímku a úsečku tato vlastnost není splněna. Vidíme, že v každé z těchto množin bezesporu existují body a v jim příslušejících vektorových prostorech vektory, které když sečteme, dostaneme body, které do těchto množin nepatří. Příkladem je bod K úsečky m spolu s vektorem $\vec{u}$ nebo bod R polopřímky q spolu s vektorem $\vec{w}$. Body $K + \vec{u}$, $R + \vec{w}$ rozhodně nenáleží úsečce m, respektive polopřímce q. Tyto podmnožiny bodového prostoru A_2 tak nemohou být afinními bodovými podprostory. Pro srovnání je na Obr. 35 přímka p určená bodem A a směrovým vektorem $\vec{v}$, která, jak již víme, definici 24 splňuje a je tedy afinním bodovým prostorem (s vektorovým zaměřením $V = [\vec{v}]$).

Ke stejnému závěru jako v případě polopřímky a úsečky dospějeme i u poloroviny, kruhu nebo trojúhelníku, viz Obr. 36. Pokud jako možné vektorové zaměření těchto množin uvažujeme vektorový prostor V_2, je z obrázku patrné, že opět v každé z množin existuje bod a ve vektorovém prostoru V_2 vektor tak, že jejich součet do množiny nepatří. Nejedná se tedy o afinní bodové podprostory.



Obrázek 36: $U = I + \vec{z} \notin t$, $Q = P + \vec{x} \notin k$, $B = A + \vec{x} \notin \to bA$

Speciální afinní bodové podprostory

Následující pojmy se používají k označení afinních bodových podprostorů uvedených dimenzí, bez ohledu na dimenzi příslušného afinního bodového prostoru A_n.

– *přímka*, podprostor dimenze 1, značíme A_1,

– *rovina*, podprostor dimenze 2, značíme A_2,

– *nadrovina*, podprostor dimenze $n-1$, značíme A_{n-1}.

14.1 Parametrické vyjádření podprostoru

Již víme, že každý bod X *afinního bodového prostoru* A_n můžeme vyjádřit jako součet zvoleného pevného bodu A a touto volbou jednoznačně určeného vektoru $\vec{x}$, $X = A+\vec{x}$. Při dané bázi $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ vektorového zaměření V_n prostoru A_n potom můžeme dle (110) bod X vyjádřit rovnicí $X = P + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + ... + x_n\vec{b}_n$.

Stejný princip uplatníme při popisu *afinního bodového podprostoru* $A_k \subseteq\subseteq A_n$. Každý jeho bod $X \in A_k$ můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \vec{x}, \tag{113}$$

kde A je pevně zvolený bod z A_k a $\vec{x}$ je vektor z vektorového podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, který je zaměřením A_k. Afinní bodový podprostor A_k je tak určen svým zaměřením V_k a libovolným ze svých bodů A, zapisujeme

$$A_k = [A, V_k]\,. \tag{114}$$

Je-li $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ báze zaměření V_k, můžeme (113) psát ve tvaru

$$X = A + t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + ... + t_k\vec{b}_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k \in R, \tag{115}$$

kterému říkáme *parametrické vyjádření* (též *parametrická rovnice*) *afinního bodového podprostoru*[1] $A_k \subseteq\subseteq A_n$. S ohledem na skutečnost, že zaměření V_k je určeno svou bází, tj. $V_k = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}]$, můžeme afinní bodový podprostor kromě (114) zapsat také ve tvaru

$$A_k = \left[A; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\right]. \tag{116}$$

[1] Příslušné věty o určení afinního bodového prostoru a jeho parametrickém vyjádření spolu s jejich důkazy jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 16–18.

Parametrická vyjádření speciálních podprostorů

Podobu vztahů (114) a (116) pro konkrétní podprostory si můžeme ilustrovat na příkladech podprostorů, s kterými se budeme v následujících pasážích nejvíce setkávat:

- *přímka*, $A_1 = [A; \vec{u}]: \quad X = A + t\vec{u}$,
- *rovina*, $A_2 = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]: \quad X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$,
- *nadrovina*, $A_{n-1} = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1}] : X = A + \sum_{i=1}^{n-1} t_i\vec{u}_i$,
- *afinní prostor*, $A_n = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n] : X = A + \sum_{i=1}^{n} t_i\vec{u}_i$.

PŘÍKLAD 14.2. *Přímka $p = [A; \vec{u}]$ je dána bodem $A = [1, 2, 3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (-2, 5, 11)$. Napište parametrické vyjádření přímky p.*

Řešení: $X = [1, 2, 3] + t(-2, 5, 11);\ t \in R$.

Rozepsáním rovnice $X = [1, 2, 3] + t(-2, 5, 11)$, kde $X = [x_1, x_2, x_3]$, po složkách dostaneme *parametrické rovnice přímky*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2t, \\ x_2 &= 2 + 5t, \\ x_3 &= 3 + 11t;\ t \in R. \end{aligned} \tag{117}$$

14.2 Parametrické rovnice podprostoru

Rozepsáním *parametrické rovnice* (též *parametrického vyjádření*) rovnice podprostoru A_k pro jednotlivé souřadnice (vzhledem k určité soustavě souřadnic φ) dostaneme *parametrické rovnice podprostoru.* Počet těchto rovnic odpovídá dimenzi n afinního bodového prostoru A_n, počet parametrů v nich potom odpovídá dimenzi k podprostoru A_k (viz příklad 14.2, kde tři rovnice odpovídají dimenzi prostoru, v němž je úloha zadána, zatímco jeden parametr koresponduje s dimenzí uvažovaného podprostoru, tj. přímky).

Uvažujme pro ilustraci ještě rovinu ρ jako podprostor $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$ afinního bodového prostoru A_3. Její parametrická rovnice je

$$\rho : \ X = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}; \quad t_1, t_2 \in R.$$

Pro souřadnice $X = [x_1, x_2, x_3], A = [a_1, a_2, a_3], \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vzhledem k soustavě souřadnic φ ji přepíšeme do tvaru

$$\rho : \ [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + t_1(u_1, u_2, u_3) + t_2(v_1, v_2, v_3); \quad t_1, t_2 \in R,$$

z kterého po rozepsání pro jednotlivé souřadnice dostaneme soustavu *parametrických rovnic roviny*

$$\begin{aligned} \rho: \ x_1 &= a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ x_3 &= a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3; \quad t_1, t_2 \in R. \end{aligned} \tag{118}$$

Stejně jako přímku a rovinu popíšeme parametrickými rovnicemi každý podprostor A_k afinního bodového prostoru A_n.

Věta 24 (Parametrické rovnice podprostoru). *Nechť je v afinním prostoru A_n dána soustava souřadnic φ. Potom můžeme podprostor A_k; $A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]$, prostoru A_n určit parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_{11} t_1 + u_{21} t_2 + ... + u_{k1} t_k \\ x_2 &= a_2 + u_{12} t_1 + u_{22} t_2 + ... + u_{k2} t_k \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= a_n + u_{1n} t_1 + u_{2n} t_2 + ... + u_{kn} t_k \end{aligned} \tag{119}$$

zkráceně

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij} t_i; \quad j = 1, 2, ..., n,$$

kde $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$, $i = 1, 2, ..., k$.

PŘÍKLAD 14.3. *Zjistěte, zda body $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, leží v rovině $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, kde $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$.*

PŘÍKLAD 14.4. *Určete dimenzi afinního bodového prostoru A_n a jeho podprostoru A_k daného rovnicí:*
a) $X = [4, -4, 2, 1, 1] + t(2, -8, 3, -5, 1)$,
b) $X = [1, 0, 2, 2] + r(1, -1, 0, 0) + s(1, 2, 0, -1)$.

PŘÍKLAD 14.5. *Zjistěte, jaké bodové podprostory jsou určené parametrickými rovnicemi*

$$a) \quad \begin{aligned} x_1 &= r + s, \\ x_2 &= 1 - s, \\ x_3 &= -5 + 2r, \\ x_4 &= 2 - r + 4s, \end{aligned} \qquad\qquad a) \quad \begin{aligned} x_1 &= 5 - r + s + t, \\ x_2 &= r, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= 2 + 4s - t. \end{aligned}$$

14.3 Kanonický tvar rovnice přímky

Skutečnost, že parametrické rovnice přímky obsahují jenom jeden parametr, dovoluje modifikovat tuto soustavu rovnic do podoby, v níž je parametr vyloučen. Uvažujme přímku $p \in A_n$ danou parametrickými rovnicemi

$$p: \begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3; \ t \in R. \end{aligned} \tag{120}$$

Potom platí

$$t = \frac{x - a_1}{u_1}, \ t = \frac{y - a_2}{u_2}, \ t = \frac{z - a_3}{u_3},$$

a přímku p tak můžeme zadat rovnicí ve tvaru

$$p: \ \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3},$$

kterému říkáme *kanonický tvar rovnice přímky.*

Poznámka. Pokud je $u_i = 0$, ponecháme pro příslušnou souřadnici x_i zvláštní rovnici. Například pro $p: \ x = 3, y = 1 - t, z = 4t; \ t \in R$ vypadá kanonický tvar rovnice přímky takto

$$p: \ x = 3, \ \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}.$$

PŘÍKLAD 14.6. *Napište parametrické vyjádření a kanonický tvar rovnice přímky, která je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$.*

a) $A = [3, 1, -4]$, $\vec{u} = (2, 7, 5)$,

b) $A = [2, 5, 1]$, $\vec{u} = (1, 2, 0)$.

14.4 Určení afinního podprostoru

Ze zkušenosti víme, že *přímka je určena dvěma různými body* a *rovina je určena třemi body, které neleží v přímce.* Otázkou je, kolik a jakých bodů potřebujeme k určení afinního bodového podprostoru dimenze k. Odpověď je skrytá ve vztahu (116). Potřebujeme tolik bodů podprostoru A_k, aby jimi bylo určeno k lineárně nezávislých vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ báze jeho vektorového zaměření V_k. Bodů tedy musí být $k + 1$ a musí být uspořádány tak, aby k jimi určených vektorů bylo nezávislých. Pro takovéto body zavedeme pojem *lineárně nezávislé body.*

Definice 28 (Lineárně nezávislé body)**.** *Body $A_0, A_1, A_2, ..., A_k$ z prostoru A_n nazýváme lineárně nezávislé (závislé), jsou-li jimi určené vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, ..., k$, lineárně nezávislé (závislé).*

Věta 25 (O určení afinního bodového podprostoru). *Afinní bodový podprostor* A_k *prostoru* A_n *je jednoznačně určen* $k+1$ *lineárně nezávislými body, které mu náleží.*

Důkaz. Zápis $A_k = [A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_0, ..., A_k - A_0]$ je ekvivalentní vztahu (116)[1]. □

Důsledky věty 25

- Přímka je určena dvěma nezávislými body, tj. dvěma různými body.
- Rovina je určena třemi nezávislými body, tj. třemi body, které neleží v přímce.
- Nadrovina je určena n nezávislými body.

Poznámka. Body ležící na jedné společné přímce nazýváme **kolineární** body. Body ležící v jedné rovině pak **komplanární** body. Více než dva kolineární body jsou lineárně závislé, stejně jako více než tři komplanární body.

Získané poznatky o souvislosti lineárně nezávislých bodů a vektorů nám dovolují zapsat parametrickou rovnici podprostoru A_k, který je dán $k+1$ lineárně nezávislými body, přímo užitím těchto bodů, jak ukazuje následující příklad.

PŘÍKLAD 14.7. *Napište parametrickou rovnici roviny* $\rho = (A, B, C)$, *kde* $A = [1, 0, 1]$, $B = [3, 4, 2]$ *a* $C = [5, 1, 0]$.

Řešení: Parametrická rovnice dané roviny je

$$\rho: \; X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A); \; t_1, t_2 \in R.$$

Jednotlivé *parametrické rovnice* potom dostaneme rozepsáním po složkách

$$\begin{aligned} \rho: \; x &= a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2), \\ z &= a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3); \; t_1, t_2 \in R. \end{aligned}$$

Odtud po dosazení souřadnic dostaneme konkrétní parametrické rovnice dané roviny

$$\begin{aligned} \rho: \; x &= 1 + 2t_1 + 4t_2, \\ y &= 4t_1 + t_2, \\ z &= 1 + t_1 - t_2; \; t_1, t_2 \in R. \end{aligned}$$

[1] Více viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 26

Důsledky řešení příkladu 14.7

Z řešení příkladu 14.7 vyplývá, jak si můžeme urychlit zápis parametrických rovnic speciálních podprostorů, které jsou dány $k+1$ body:

– Přímka: $X = A + t(B - A);\ t \in R$

– Rovina: $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$

– Nadrovina: $X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_{n-1}(A_{n-1} - A_0);$ $t_1, t_2, ..., t_{n-1} \in R$

PŘÍKLAD 14.8. *V A_4 jsou dány body $K = [1,0,1,2]$, $L = [4,2,3,1]$, $M = [-1,3,0,1]$, $N = [2,1,1,5]$. Rozhodněte, zda určují podprostor $A_3 \subseteq\subseteq A_4$. Pokud ano, napište jeho parametrické vyjádření.*

PŘÍKLAD 14.9. *Rovina je určena body $A = [2,1,0]$, $B = [2,4,1]$ a směrem vektoru $\vec{u} = (1,1,3)$. Napište její parametrické rovnice.*

Cvičení – Parametrické rovnice afinního bodového podprostoru

1: Zjistěte, zda body $A_1 = [2, 1, -1]$, $A_2 = [3, 3, 1]$, $A_3 = [2, 1, -5]$, $A_4 = [5, 4, -1]$, $A_5 = [5, 7, 4]$ leží na přímce $[A; \vec{u}]$, kde $A = [3, 3, -2]$ a $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

2: Zjistěte, zda body $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, $A_3 = [3, 1, -5]$, $A_4 = [1, 2, -3]$, $A_5 = [-1, -2, -3]$, $A_6 = [1, 3, 1]$ leží v rovině $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, kde $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$ a $\vec{v} = (1, 3, 1)$.

3: Napište parametrické rovnice a kanonický tvar rovnice přímky $[K; \vec{m}]$, je-li:

a) $K = [1, -2],\ \vec{m} = (5, 9)$,

b) $K = [2, 5, -3],\ \vec{m} = (-4, 0, 1)$,

c) $K = [1, 0, -1, 0, 2],\ \vec{m} = (4, 3, 1, 2, 1)$.

4: Napište parametrické rovnice roviny ρ, která je dána těmito údaji:

a) $\rho = [K, L, M];\ K = [2, 0, 1],\ L = [-1, 2, 3],\ M = [3, 1, -5]$,

b) $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}];\ A = [1, 0, 2, 3],\ \vec{u} = (1, 1, -1, 0),\ \vec{v} = (4, 0, 3, 2)$,

c) $\rho = [P, Q, \vec{w}];\ P = [7, -8, 3],\ Q = [4, 5, 1],\ \vec{w} = (2, 3, 4)$.

5: Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází daným bodem $P = [4, 5, -6]$ a je rovnoběžná s přímkou $q : x = 2 + r,\ y = -4 + 2r,\ z = 9 - 5r;\ r \in \mathbb{R}$.

6: Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází daným bodem $B = [1, 2]$ a je kolmá na přímku $q = [M, N];\ M = [0, 1], N = [4, 3]$.

7: Napište parametrické rovnice roviny ρ procházející bodem $Q = [5, 10, 12]$ rovnoběžně s rovinou σ danou rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 4s + t, \\ y &= -3 + s - 2t, \\ z &= 3s + 5t;\ s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

8: Napište parametrické rovnice úsečky AB, je-li:

a) $A = [-2, 5],\ B = [15, 9]$,

b) $A = [2, 5, -3],\ B = [0, 4, 1]$.

9: Určete parametrické vyjádření roviny, která prochází přímkou $x = 2-3t$, $y = 7+t$, $z = -1 + 2t$ a je rovnoběžná s přímkou $x = 3 - r$, $y = 2 + 4r$, $z = 1 - r$.

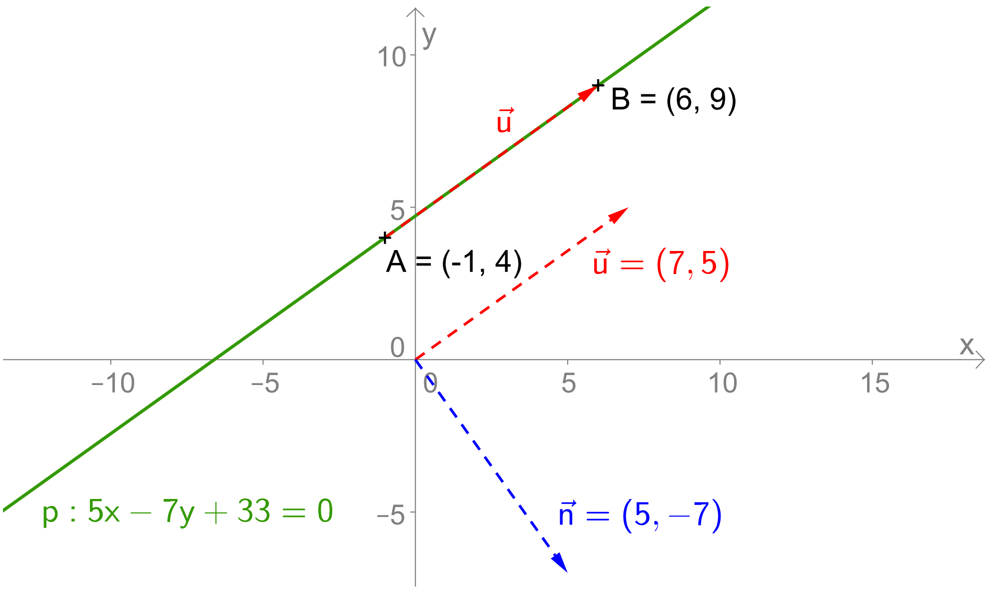
10: Parametrickými rovnicemi vyjádřete polorovinu určenou bodem $A = [3, 2, 1]$ a přímkou $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $z = 3 + 4t$.

11: Rozhodněte o poloze bodu $M = [3, 3]$ vzhledem k trojúhelníku ABC, je-li $A = [0, 0]$, $B = [10, 2]$, $C = [6, 12]$.

15 Obecná (neparametrická) rovnice nadroviny

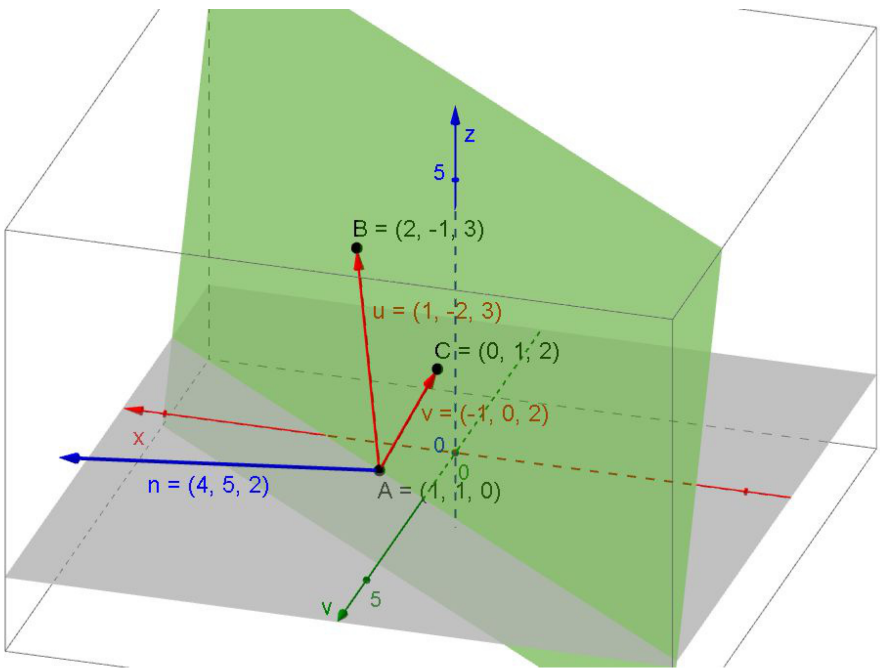
Nadrovinou v afinním bodovém prostoru A_n rozumíme jeho podprostor dimenze $n-1$. V afinním bodovém prostoru A_2 tak roli nadroviny hraje *přímka*, zatímco v afinním bodovém prostoru A_3 je nadrovinou *rovina*.

Ze středoškolské matematiky již víme, že přímku v A_2 a rovinu v A_3 lze popsat jednou algebraickou rovnicí, které říkáme *obecná rovnice*. Například přímka $p \subseteq\subseteq$



Obrázek 37: Obecná rovnice přímky $p:\ 5x-7y+33=0$

A_2, která je dána body $A=[-1,4], B=[6,9]$, má obecnou rovnici $p:\ 5x-7y+33=0$, viz Obr. 37. Rovina $\rho \subseteq\subseteq A_3$, určená body $A=[1,1,0], B=[2,-1,3], C=[0,1,2]$, má obecnou rovnici $\rho:\ 4x+5y+2z-9=0$, viz Obr. 38.



Obrázek 38: Obecná rovnice roviny $\rho:\ 4x+5y+2z-9=0$

Skutečnost, že přímku v A_2 a rovinu v A_3 lze popsat jedinou rovnicí můžeme zobecnit na případ nadroviny v afinním bodovém prostoru A_n. Využijeme k tomu své zkušenosti získané řešením soustav lineárních rovnic.

Především víme, že množina všech řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&...... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

je *podprostor afinního bodového prostoru* A_n, jehož dimenze je $k = n - h$, kde $h = h(A) = h(A^*)$ (A je *matice soustavy*, A^* je *rozšířená matice soustavy*). Představme si, že máme „soustavu“ jediné nehomogenní rovnice o n neznámých (přitom koeficient u alespoň jedné z nich je různý od nuly). Potom bodový prostor jejího řešení má dimenzi $k = n - 1$, protože pro takovouto rovnici je určitě $h = h(A) = h(A^*) = 1$. Každou lineární algebraickou rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0, \tag{121}$$

kde $a_i \neq 0$ pro aspoň jedno $i = 1, 2, \ldots n$, je tak určena *nadrovina* v prostoru A_n.

Naopak, každý afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subseteq A_n$ lze dle věty 24 na str. 108 popsat soustavou n parametrických rovnic (119) s k parametry. V případě nadroviny se tedy jedná o n parametrických rovnic s $n - 1$ parametry. Pokud z jedné z n parametrických rovnic vyjádříme parametr, řekněme třeba t_1, a získaným výrazem ho nahradíme ve zbývajících rovnicích, přijdeme sice o jednu rovnici, ale také se o jeden zmenší počet parametrů. Říkáme, že jsme parametr t_1 eliminovali. Pokud se rozhodneme takto eliminovat všechny zbývající parametry, je zřejmé, že na konci procesu eliminace nám zůstane jediná rovnice ve tvaru (121), bez parametru, pouze s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Tak jsme ukázali, že každé nadrovině A_{n-1} afinního bodového prostoru A_n je jednoznačně přiřazena rovnice ve tvaru (121), kterou nazýváme *obecnou* (též *neparametrickou*) *rovnicí nadroviny.*

V následujících pasážích této kapitoly se budeme věnovat metodám výpočtu obecné rovnice přímky v afinním bodovém prostoru A_2 a roviny v prostoru A_3. V závěru pak získané poznatky využijeme k zobecnění do prostoru A_n.

15.1 Obecná rovnice přímky v A_2

Na konkrétním příkladu si ukážeme následující čtyři metody výpočtu obecné rovnice přímky v A_2:

i. **Eliminace parametru z parametrických rovnic přímky.**
Z jedné z rovnic

$$\begin{aligned} p:\ x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2;\ t \in R \end{aligned}$$

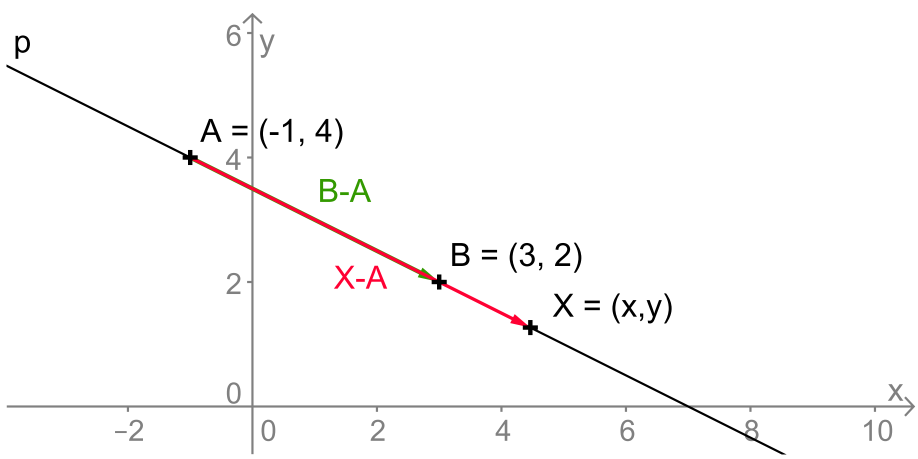
vyjádříme t a dosadíme do té zbývající. Dostaneme rovnici

$$u_2x - u_1y - u_2a_1 + u_1a_2 = 0, \tag{122}$$

která je obecnou rovnicí přímky p (je ve tvaru rovnice $ax + by + c = 0$, kde $a = u_2, b = -u_1, c = -u_2a_1 + u_1a_2$). Všimněte si, že koeficienty u x a y jsou souřadnice $(u_2, -u_1)$ vektoru, který je kolmý ke směrovému vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ přímky p, říkáme mu *normálový vektor*, značíme ho $\vec{n}$ (směrový a normálový vektor přímky viz Obr. 37).

ii. **Dosazení souřadnic daných bodů do obecné rovnice.**
Je-li přímka p dána dvěma svými body $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$, dosadíme jejich souřadnice do obecné rovnice $ax + by + c = 0$ a vypočítáme koeficienty a, b, c (ty jsou ovšem určeny až na násobek nenulovým reálným číslem, protože rovnice $ax+by+c = 0$ a $kax+kby+kc = 0$, kde $k \in R - \{0\}$, popisují stejnou přímku).

iii. **Využití lineární závislosti vektorů nebo nulového obsahu jimi určeného rovnoběžníku.**
Z Obr. 39 je patrné, že právě jenom pro body X přímky p, která je určená dvěma body A, B, platí, že vektory $B - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé. Potom



Obrázek 39: Obecná rovnice přímky; vektory $B - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé

ale matice, jejímiž řádky jsou tyto vektory, je singulární, tj. její determinant je roven nule

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{123}$$

Úpravou (123) dostaneme obecnou rovnici přímky p ve tvaru

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 = 0. \tag{124}$$

Ke stejnému výsledku se dostaneme úvahou založenou na vztahu pro výpočet obsahu rovnoběžníku určeného dvěma vektory (viz (105) na str. 95). Je zřejmé, že rovnoběžník určený vektory $B - A$ a $X - A$ má obsah

$$S_\diamond = \left\| \begin{array}{cc} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{array} \right\|$$

rovný 0 právě tehdy, když bod X leží na přímce p určené body A, B. Tak se opět dostáváme ke vztahu (123).

iv. **Využití normálového vektoru.**
Ze vztahů (122) a (124) je patrné, že koeficienty a, b v obecné rovnici přímky $p:\ ax + by + c = 0$ jsou souřadnicemi vektoru kolmého ke směru přímky p, tj. *normálového vektoru* této přímky. Souřadnice normálového vektoru přímky snadno získáme ze souřadnic jejího směrového vektoru uplatněním požadavku kolmosti těchto dvou vektorů, tj. požadavku splnění rovnosti $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, (prohozením a změnou znaménka u jedné z nich, vztah mezi směrovým a normálovým vektorem přímky viz Obr. 37). Takto získané koeficienty a, b dosadíme spolu se souřadnicemi x, y jednoho z daných bodů přímky do rovnice $ax + by + c = 0$ a dopočítáme hodnotu c.

PŘÍKLAD 15.1. *Určete obecnou rovnici přímky* $p = [A, B]$; $A = [-5, 3]$, $B = [2, 4]$.

Řešení:
<u>*ad i.*</u> Vypočítáme směrový vektor přímky $\vec{u} = B - A = (7, 1)$, napíšeme její parametrické rovnice

$$\begin{aligned} p:\ x &= -5 + 7t \\ y &= 3 + t;\ t \in R \end{aligned}$$

a eliminací (vyloučením) parametru t získáme její obecnou (neparametrickou) rovnici

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

<u>*ad ii.*</u> Do rovnice $ax+by+c = 0$ dosadíme souřadnice bodů A, B a řešíme příslušnou soustavu rovnice

$$\begin{aligned} -5a + 3b + c &= 0, \\ 2a + 4b + c &= 0 \end{aligned}$$

s neznámými a, b, c. Vyjde nám $a = \frac{1}{26}c, b = -\frac{7}{26}c$, kde $c \in R$. Protože nám jde o jedno konkrétní řešení, které bude vypadat „hezky“, volíme $c = 26$ a dostáváme sadu koeficientů $a = 1, b = -7, c = 26$ pro obecnou rovnici dané přímky

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

ad iii. Do vztahu (123) dosadíme souřadnice bodů A, B

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-3 \\ 2-(-5) & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+5 & y-3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a spočítáme determinant na levé straně. Dostaneme obecnou rovnici dané přímky

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

ad iv. Vypočítáme směrový vektor přímky $\vec{u} = B - A = (7,1)$ a určíme souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (n_1, n_2)$ tak, aby byla splněna podmínka kolmosti

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (7,1) \cdot (n_1, n_2) = 7n_1 + 1n_2 = 0.$$

Nejjednodušší je zvolit $\vec{n} = (n_1, n_2) = (u_2, -u_1) = (1, -7)$. Nyní známe podobu prvních dvou členů obecné rovnice přímky $p:\ x - 7y + c = 0$. Když do ní dosadíme souřadnic bodu $A = [-5, 3]$ (stejně tak můžeme dosadit souřadnice B), dostaneme rovnici $-5 - 7 \cdot 3 + c = -26 + c = 0$, ze které vypočítáme $c = 26$. Opět dostaneme obecnou rovnici dané přímky ve tvaru

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

15.2 Obecná rovnice roviny v A_3

Pro výpočet obecné rovnice roviny v A_3 si popíšeme čtyři metody, které jsou analogické s výše uvedenými metodami výpočtu obecné rovnice přímky v A_2:

i. **Eliminace parametru z parametrických rovnic roviny.**
Z jedné z rovnic

$$\begin{aligned} \rho:\ x &= a_1 + su_1 + tv_1, \\ y &= a_2 + su_2 + tv_2, \\ z &= a_3 + su_3 + tv_3, ;\ s, t \in R \end{aligned}$$

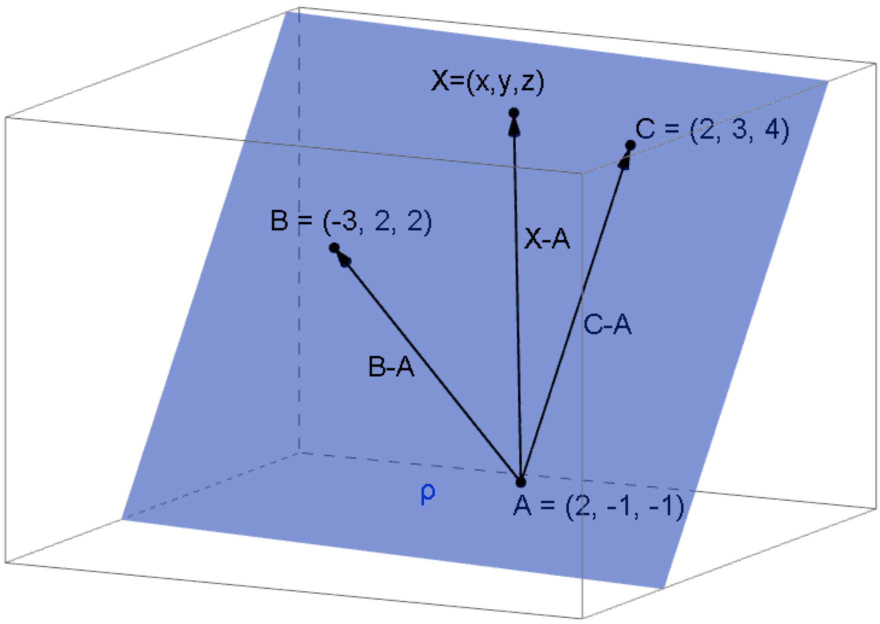
vyjádříme t a dosadíme do těch zbývajících. To samé potom provedeme s parametrem s. Dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{125}$$

kde (po případném vydělení celé rovnice společným dělitelem jejích koeficientů) $a = u_2v_3 - u_3v_2,\ b = u_3v_1 - u_1v_3,\ c = u_1v_2 - u_2v_1,\ d = -(u_2v_3 - u_3v_2)a_1 - (u_3v_1 - u_1v_3)a_2 - (u_1v_2 - u_2v_1)a_3$. Jedná se o obecnou rovnici roviny ρ. Všimněte si, že koeficienty u x, y a z jsou souřadnicemi vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, tj. vektoru, který je kolmý k rovině ρ (přesněji k vektorům zaměření roviny ρ.) Říkáme mu *normálový vektor* roviny a značíme ho $\vec{n}$ (normálový vektor roviny viz Obr. 38).

ii. **Dosazení souřadnic daných bodů do obecné rovnice.**
Je-li rovina ρ dána třemi svými (lineárně nezávislými) body $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3], C = [c_1, c_2, c_3]$, dosadíme jejich souřadnice do obecné rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a vypočítáme koeficienty a, b, c, d (ty jsou ovšem určeny až na násobek nenulovým reálným číslem, protože rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a $kax + kby + kcz + kd = 0$, kde $k \in R - \{0\}$, popisují stejnou rovinu).

iii. **Využití lineární závislosti vektorů nebo nulového objemu jimi určeného rovnoběžnostěnu.**
Z Obr. 40 je patrné, že právě jenom pro body X roviny ρ, která je určena třemi lineárně nezávislými body A, B, C, platí, že vektory $B - A, C - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé. Potom ale matice, jejímiž řádky jsou tyto vektory, je singulární,



Obrázek 40: Obecná rovnice roviny; vektory $B - A, C - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé

tj. její determinant je roven nule,

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{126}$$

Úpravou (126) dostaneme obecnou rovnici roviny ρ ve tvaru (125), se stejným významem koeficientů a, b, c, d, pokud $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$.

Ke stejnému výsledku se dostaneme úvahou založenou na vztahu pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory (viz (106) na str. 95). Je zřejmé, že rovnoběžnostěn určený vektory $B - A,\ C - A$ a $X - A$ má objem

$$V = \left\| \begin{matrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{matrix} \right\|$$

rovný 0 právě tehdy, když bod X leží v rovině ρ určené body A, B, C. Tak se opět dostáváme ke vztahu (126).

iv. **Využití normálového vektoru.**
Ze vztahů (125) a (126) je patrné, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: ax+by+cz+d=0$ jsou souřadnicemi vektoru kolmého k rovině (přesněji k vektorům jejího zaměření), tj. *normálového vektoru* této roviny. Dokonce jde, po vydělení případným společným dělitelem, o souřadnice vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = B-A$ a $\vec{v} = C-A$ jsou vektory generující vektorové zaměření roviny. Souřadnice normálového vektoru roviny tak snadno získáme výpočtem tohoto vektorového součinu (vztah mezi $\vec{u} = B-A$ a $\vec{v} = C-A$ a normálovým vektorem $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ roviny viz Obr. 38). Takto získané koeficienty a, b, c dosadíme spolu se souřadnicemi x, y, z jednoho z daných bodů roviny do rovnice $ax+by+cz+d=0$ a dopočítáme hodnotu d.

PŘÍKLAD 15.2. *Určete neparametrickou (obecnou) rovnici roviny určené body* $A=[1,0,3]$, $B=[2,4,-1]$, $C=[0,3,8]$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 32x-y+7z-53=0$$

PŘÍKLAD 15.3. *Napište obecnou rovnici roviny určené bodem* $A=[2,1,-2]$ *a směry vektorů* $\vec{u}=(3,2,4)$, $\vec{v}=(3,5,2)$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16x+6y+9z+44=0$$

PŘÍKLAD 15.4. *Napište obecnou rovnici roviny určené třemi body* $A=[1,1,-1]$, $B=[3,2,0]$, $C=[4,4,-3]$.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1)  A:[1,1,-1]$ B:[3,2,0]$ C:[4,4,-3]$ X:[x,y,z]$

(%i5)  M:matrix(X-A,B-A,C-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

```
(%i6) expand(determinant(M))=0;
```

(%o6) $3\,z+7\,y-5\,x+1=0$

PŘÍKLAD 15.5. *Určete parametrické rovnice roviny*

$$\rho:\ 2x-y+3z-1=0.$$

Řešení: Řešíme jako „soustavu“ jedné rovnice o třech neznámých. Dvě z nich nahradíme reálnými parametry, jako vhodné se jeví x a z, a zbývající neznámou, tj. y, z rovnice vyjádříme. Dostaneme parametrické rovnice

$$\begin{aligned}\rho:\ x &= r,\\ y &= -1+2r+3s,\\ z &= s;\ r,s\in R.\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r:2*x-y+3*z-1=0;
```

(%o1) $3\,z-y+2\,x-1=0$

```
(%i2) solve(r,[y,z,x]);
```

(%o2) $[[y=3\,\%r2+2\,\%r1-1,z=\%r2,x=\%r1]]$

15.3 Obecná rovnice nadroviny v A_n

Vztahy (123) a (126), v nichž je k zápisu obecné (neparametrické) rovnice přímky v A_2 a roviny v A_3 použit determinant, nám dovolují pojem obecné (též neparametrické) rovnice zobecnit na nadrovinu v afinním bodovém prostoru A_n. Protože nám v prostorech vyšší dimenze již nevystačí geometrická představa, odvodíme vztah lineární závislosti příslušných vektorů rovnou z definice tohoto pojmu, jak ukazuje následující příklad (který je situován do prostoru dimenze 3).

Uvažujme nadrovinu prostoru A_3 (tj. rovinu), která je určena třemi nezávislými body A, B, C; $A=[a_1,a_2,a_3]$, $B=[b_1,b_2,b_3]$, $C=[c_1,c_2,c_3]$. Vyjádříme ji vektorově parametrickou rovnicí

$$X=A+t_1(B-A)+t_2(C-A).$$

Po jejím přepsání do tvaru

$$t_0(X-A)+t_1(B-A)+t_2(C-A)=\vec{o},$$

kde $t_0=1\neq 0$, je zřejmé, že vektory $X-A$, $B-A$ a $C-A$ jsou **lineárně závislé**. Z toho plyne tvrzení následující věty.

Věta 26 (Obecná rovnice nadroviny I)**.** *Jestliže je nadrovina A_{n-1} určena n lineárně nezávislými body A_0, $A_1, ...,$ A_{n-1}, které mají v afinním bodovém prostoru A_n souřadnice $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, je pro každý bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ této nadroviny splněna rovnice*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{127}$$

kterou nazýváme **obecná (neparametrická) rovnice nadroviny***.*

Důkaz. Myšlenka důkazu je ilustrována příkladem nadroviny v A_3, který je uveden před větou. Jediné, co je třeba ještě dokázat je, že rovnice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{01} & x_2 - a_{02} & \dots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} - a_{01} & a_{n-1,2} - a_{02} & \dots & a_{n-1,n} - a_{0n} \end{vmatrix} = 0.$$

S touto ekvivalencí jsme se však již setkali (viz str. 95) a víme, že se snadno dokáže užitím věty o rozvoji determinantu. □

I v prostoru A_n platí, že po výpočtu determinantu dostaneme obecnou rovnici v algebraickém tvaru, jak uvádí následující věta.

Věta 27 (Obecná rovnice nadroviny II)**.** *Každý bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ nadroviny A_{n-1} ainního bodového prostoru A_n splňuje svými souřadnicemi obecnou (neparametrickou) rovnici*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 = 0, \tag{128}$$

kterou můžeme zkráceně zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0, \tag{129}$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n, c_0$ jsou po řadě algebraické doplňky prvků $x_1, x_2, ..., x_n, 1$ prvního řádku determinantu (127) *z věty 26.*

Důsledky vět 26, 27

– Každá rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ je rovnicí nadroviny A_{n-1}, pokud je alespoň jedno $c_i \neq 0$.

– V prostoru A_2 je nadrovinou **přímka**. Nechť $p = \leftrightarrow AB$; $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom

$$p : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff ax + by + c = 0.$$

– V prostoru A_3 je nadrovinou **rovina**. Nechť $\rho = (ABC)$; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom

$$\rho : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff ax + by + cz + d = 0.$$

Obecná rovnice nadroviny A_{n-1} je určena až na nenulový násobek. Je-li $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ rovnicí nadroviny, pak také rovnice $k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0\right) = 0$ je obecnou rovnicí této nadroviny ve stejné soustavě souřadnic, jestliže $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo.

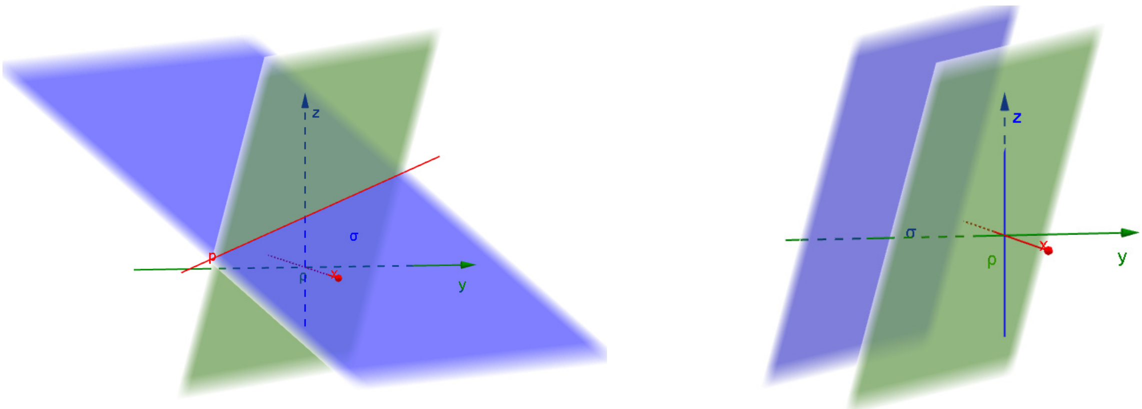
16 Svazky a trsy nadrovin

16.1 Svazky rovin v A_3

PŘÍKLAD 16.1. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ, σ :*

a) $\rho:\ 2x+3y-z+1=0,\ \sigma:\ x+y+2z-3=0,$

b) $\rho:\ 2x+3y-z+1=0,\ \sigma:\ 4x+6y-2z+5=0,$

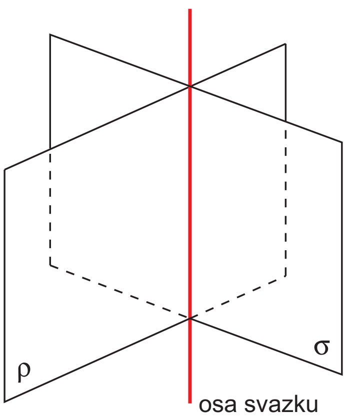


a) Svazek rovin 1. druhu

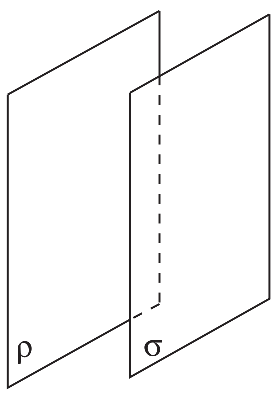
b) Svazek rovin 2. druhu

Obrázek 41: Svazky rovin v A_3

Definice 29 (Svazek rovin)**.** *Množinu všech rovin z A_3, jejichž průnikem je přímka (tj. afinní bodový podprostor dimenze 1) nazveme* **svazkem rovin prvého druhu**. *Množinu všech navzájem rovnoběžných rovin nazveme* **svazkem rovin druhého druhu (osnovou rovin)**.



Svazek rovin 1. druhu



Svazek rovin 2. druhu
(osnova rovin)

Je zřejmé, že *svazek rovin* je určen dvojicí rovin (viz Obr. 41). Otázkou je, jak vypadají rovnice dalších rovin náležejících těmto svazkům. Jak souvisejí s rovnicemi daných „určujících“ rovin

$$\rho:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ \sigma:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0?$$

Řešením je rovnice ve tvaru lineární kombinace obecných rovnic rovin „určujících“ svazek

$$\tau: \ \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

V případě rovin uvedených v příkladu 16.1 a zobrazených na Obr. 41 se jedná o svazky s těmito rovnicemi:

ad a) Svazek prvního druhu určený rovinami $\rho: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \ \sigma: \ x + y + 2z - 3 = 0:$

$$\lambda_1(2x + 3y - z + 1) + \lambda_2(x + y + 2z - 3) = 0.$$

ad b) Svazek druhého druhu určený rovinami $\rho: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \ \sigma: \ 4x + 6y - 2z + 5 = 0:$

$$\lambda_1(2x + 3y - z + 1) + \lambda_2(4x + 6y - 2z + 5) = 0.$$

Podle typu svazku se liší požadavky na hodnoty koeficientů λ_1, λ_2. Pro svazek rovin 1. druhu stačí požadovat, aby aspoň jeden z těchto koeficientů byl různý od nuly (tj. nesmí být oba zároveň rovny nule). V případě svazku 2. druhu požadujeme, aby tyto koeficienty nebyly řešením soustavy $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = 0$.

Věta 28 (Rovnice svazku rovin 1. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0, \quad L_2 = b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$$

rovnice různoběžných rovin v A_3 v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku rovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Věta 29 (Rovnice svazku rovin 2. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0, \quad L_2 = b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$$

rovnice rovnoběžných rovin v A_3 v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku rovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = 0; \ i = 1, 2, 3.$

PŘÍKLAD 16.2. *Rovina je určena bodem* $M = [2, -1, 3]$ *a průsečnicí rovin o rovnicích* $6x + 2y - z - 3 = 0$, $3x + 4y - 2z - 2 = 0$. *Napište její rovnici.*

PŘÍKLAD 16.3 (Svazek tří nadrovin)**.** *Rozhodněte, zda roviny* L_1, L_2, L_3 *náleží témuž svazku:*

a) $L_1: \; 2x + 3y - z + 1 = 0, \quad L_2: \; x + y + 2z - 3 = 0, \quad L_3: \; x - 2y + z + 5 = 0.$

b) $L_1: \; x-2y+5z-1 = 0, \quad L_2: \; -3x+6y-15z+5 = 0, \quad L_3: \; 2x-4y+10z+9 = 0.$

Poznámka. Uvažujme matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = H, \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh svazku**, který tvoří uvažované roviny:

i) jestliže $H = h = 2$, potom se jedná o **svazek rovin prvého druhu**,

ii) jestliže $H = 2, \; h = 1$, potom se jedná o **svazek rovin druhého druhu**.

16.2 Svazky přímek v A_2

Analogicky svazkům rovin uvažujeme i *svazky přímek*. Svazku přímek prvního druhu (zkráceně hovoříme o svazku přímek) odpovídá množina všech přímek, které mají společný jeden bod (tzv. střed svazku). Svazku přímek druhého druhu (zkráceně hovoříme o osnově přímek) pak odpovídá množina všech navzájem rovnoběžných přímek.

PŘÍKLAD 16.4. *Rozhodněte, zda přímky* a, b, c *patří do téhož svazku:*

$a: \; 2x + y + 2 = 0, \quad b: \; 5x - 3y + 27 = 0, \quad c: \; x - 6y + 27 = 0.$

Poznámka. K řešení příkladu 16.4 můžeme využít i determinant matice M_1.

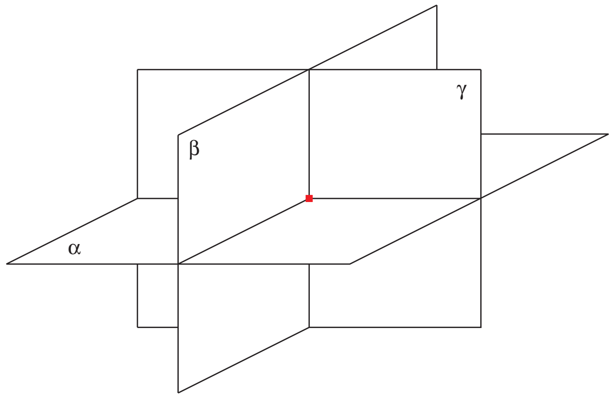
PŘÍKLAD 16.5. *Svazek přímek je určen přímkami* $a: \; x + 2y - 5 = 0$, $b: \; 3x - 2y + 1 = 0$. *Určete rovnici přímky svazku, která*

a) prochází bodem $A = [2, -1]$,

b) je rovnoběžná s přímkou $p: \; y - 1 = 0$.

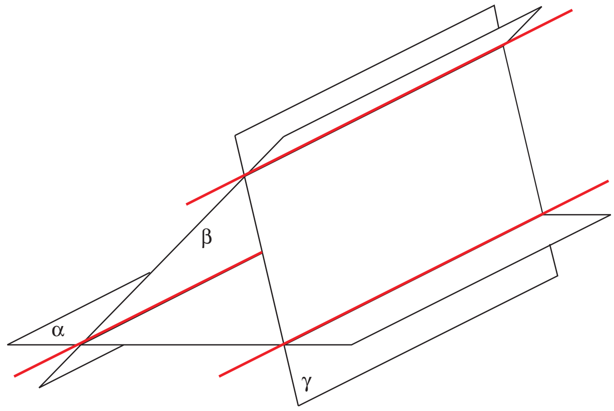
16.3 Trs rovin

K definici trsu rovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří roviny, které nenáleží témuž svazku?“



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$

Trs rovin 1. druhu



$V^{\alpha} \cap V^{\beta} \cap V^{\gamma} = V_{n-2}$

Trs rovin 2. druhu

Věta 30 (Vzájemná poloha tří rovin)**.** *Tři roviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_3, které nenáleží témuž svazku rovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bod (tj. bodový podprostor A_0),
2) průnik rovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_1 (tj. směr).

Definice 30 (Trs rovin)**.** *Množinu všech rovin v A_3, jejichž průnikem je bod, nazýváme* **trs rovin prvého druhu***. Množinu všech rovin, jejichž zaměření obsahují společný podprostor V_1 (tj. směr) prostoru V_3, nazveme* **trs rovin druhého druhu***.*

Poznámka. V každém trsu 1. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 1. druhu a v každém trsu rovin 2. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 2. druhu i nekonečně mnoho svazků 1. druhu.

Poznámka. Analogicky rovinám v A_3 můžeme uvažovat i o *trsech přímek* v prostoru A_2. Ukáže se, že trs přímek prvého v A_2 neexistuje. Trs přímek druhého druhu je pak tvořen všemi přímkami v rovině. Proč to tak je, bude zřejmé z definice trsu nadrovin v A_n.

Opět nás zajímá, jak se dá vyjádřit rovnice libovolné roviny náležející danému trsu pomocí rovnic jeho „určujících rovin“.

Věta 31 (Rovnice trsu 1. druhu)**.** *Nechť průnikem rovin L_1, L_2, L_3 je bod. Potom rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu rovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Věta 32 (Rovnice trsu 2. druhu)**.** *Nechť průnik rovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnikem jejich zaměření je vektorový prostor dimenze* 1. *Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu rovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, 3$.

16.4 Svazek nadrovin

Definice 31 (Svazek nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin z A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n - 2$, nazveme* **svazkem nadrovin prvého druhu***. Množinu všech navzájem rovnoběžných nadrovin nazveme* **svazkem nadrovin druhého druhu (osnovou nadrovin)***.*

Věta 33 (Rovnice svazku nadrovin 1. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

rovnice různoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Věta 34 (Rovnice svazku nadrovin 2. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

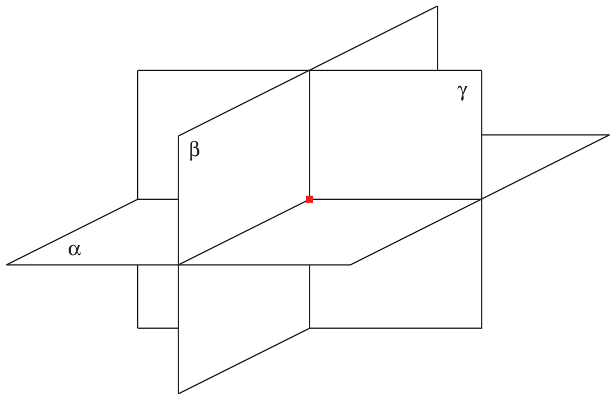
rovnice rovnoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = 0$; $i = 1, 2, ..., n$.

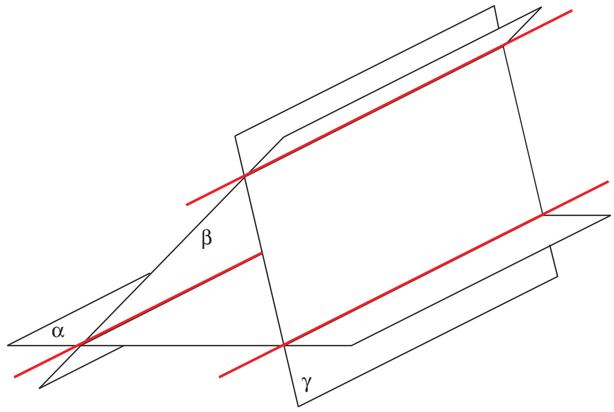
16.5 Trs nadrovin

K definici trsu nadrovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří nadroviny, které nenáleží témuž svazku?“



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$

Trs (nad)rovin 1. druhu



$V^\alpha \cap V^\beta \cap V^\gamma = V_{n-2}$

Trs (nad)rovin 2. druhu

Věta 35 (Vzájemná poloha tří nadrovin)**.** *Tři nadroviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_n, které nenáleží témuž svazku nadrovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bodový podprostor A_{n-3},
2) průnik nadrovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_{n-2}.

Definice 32 (Trs nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin v A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n-3$, nazýváme* **trs nadrovin prvého druhu**. *Množinu všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje podprostor V_{n-2} prostoru A_n, nazveme* **trs nadrovin druhého druhu**.

PŘÍKLAD 16.6 (Průnik tří nadrovin)**.** *Vymyslete, jak z hodností matic M_1, M_2 příslušejících třem nadrovinám L_1, L_2, L_3 poznáme, zda tyto nadroviny náležejí nějakému svazku nebo zda tvoří trs, a potom jaký?*

16.5.1 Rovnice trsu nadrovin

Věta 36 (Rovnice trsu 1. druhu)**.** *Nechť průnikem nadrovin L_1, L_2, L_3 je bodový podprostor dimenze $n-3$. Pak rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Věta 37 (Rovnice trsu 2. druhu). *Nechť průnik nadrovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnik jejich zaměření je vektorový prostor dimenze $n-2$. Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, ..., n$.

PŘÍKLAD 16.7 (Trs čtyř nadrovin). *Vyslovte kritérium pro určení, zda čtyři nadroviny L_1, L_2, L_3, L_4 náleží témuž trsu nadrovin.*

Poznámka. Uvažujme opět matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = h', \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh trsu**, který tvoří uvažované nadroviny:

i) jestliže $h' = h = 3$, potom nadroviny vytváří **trs prvého druhu**,

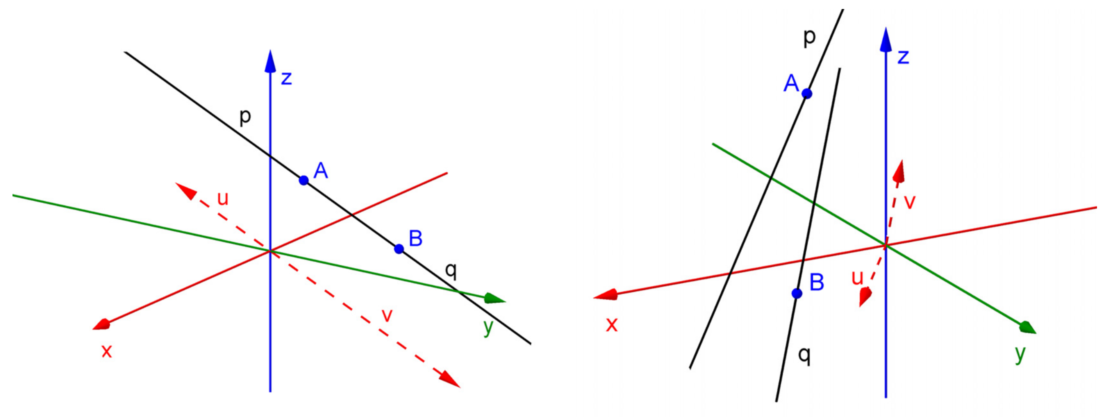
ii) jestliže $h' = 3,\ h = 2$, potom nadroviny tvoří **trs druhého druhu**.

17 Vzájemná poloha afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 17.1. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímek* $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$:

a) $A = [1, 2, 3]$, $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $B = [0, 5, 1]$, $\vec{v} = (-2, 6, -4)$.

b) $A = [1, -3, 4]$, $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $B = [3, 0, -1]$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$.



a) p, q jsou totožné   b) p, q jsou mimoběžné

Obrázek 42: Vzájemná poloha přímek $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$

ad a)

```
(%i1) A:matrix([1],[2],[3])$ u:matrix([1],[-3],[2])$
      B:matrix([0],[5],[1])$ v:matrix([-2],[6],[-4])$
(%i5) M:addcol(u,-v,B-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

```
(%i6) triangularize(M);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Přímky p, q jsou totožné.

ad b)

```
(%i1) A:matrix([1],[-3],[4])$ u:matrix([2],[2],[-1])$
      B:matrix([3],[0],[-1])$ v:matrix([0],[1],[3])$
(%i5) M:addcol(u,-v,B-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

```
(%i6) triangularize(M);
```

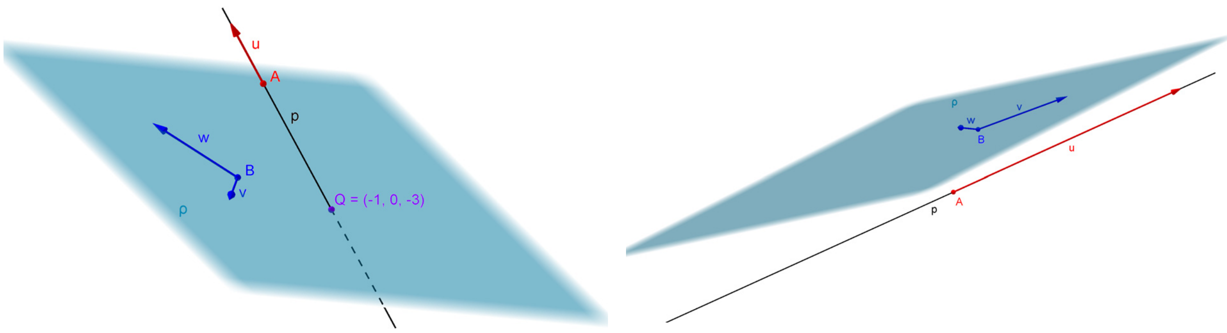
(%o6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

Přímky p, q jsou mimoběžné.

PŘÍKLAD 17.2. *Určete vzájemnou polohu přímky* $p = [A; \vec{u}]$ *a roviny* $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$:

a) $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

b) $A = [1, 0, 0]$, $\vec{u} = (7, 7, 1)$, $B = [0, 1, 3]$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$, $\vec{w} = (2, -1, -1)$.



a) p, ρ jsou různoběžné

b) p, ρ jsou rovnoběžné

Obrázek 43: Vzájemná poloha přímky $p = [A; \vec{u}]$ a roviny $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$

ad a)

```
(%i1) A:matrix([1],[2],[1])$ u:matrix([1],[1],[2])$
      B:matrix([2],[1],[-2])$ v:matrix([0],[2],[-1])$
      w:matrix([3],[-1],[2])$

(%i6) M:addcol(u,-v,-w,B-A);
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) triangularize(M);
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

Přímka p a rovina ρ jsou různoběžné se společným bodem $Q = [-1, 0, -3]$.

ad b)

```
(%i1) A:matrix([1],[0],[0])$ u:matrix([7],[7],[1])$
      B:matrix([0],[1],[3])$ v:matrix([1],[3],[1])$
      w:matrix([2],[-1],[-1])$

(%i6) M:addcol(u,-v,-w,B-A);
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -1 \\ 7 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) triangularize(M);
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & 21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix}$$

Přímka p a rovina ρ jsou rovnoběžné.

Definice 33 (Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů)**.** *Dva afinní bodové podprostory* $\mathcal{A}_h = [A; V_h]$, $\mathcal{A}_k = [A; V_k]$ *afinního bodového prostoru* $\mathcal{A}_n$ *se nazývají:*

a) **rovnoběžné**, *jestliže* $V_h \subseteq\subseteq V_k$ *nebo* $V_k \subseteq\subseteq V_h$, *značíme* $\mathcal{A}_h || \mathcal{A}_k$,

b) **incidentní**, *jestliže* $\mathcal{A}_h \subseteq\subseteq \mathcal{A}_k$ *nebo* $\mathcal{A}_k \subseteq\subseteq \mathcal{A}_h$,

c) **různoběžné**, *jestliže* $\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_k \neq \emptyset$ *a zároveň* $\mathcal{A}_h$, $\mathcal{A}_k$ **nejsou incidentní**,

d) **mimoběžné**, *jestliže* $\mathcal{A}_h$, $\mathcal{A}_k$ **nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné**.

17.1 Rovnoběžné afinní bodové podprostory

Rovnoběžné afinní bodové podprostory $\mathcal{A}_h$, $\mathcal{A}_k$ značíme

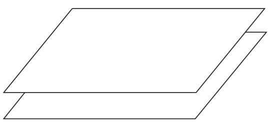
$$\mathcal{A}_h || \mathcal{A}_k.$$

Dva afinní bodové podprostory jsou rovnoběžné, jestliže zaměření jednoho z nich je součástí (podprostorem) zaměření druhého z nich. Například dvě rovnoběžné přímky mají společný směrový vektor, dvě rovnoběžné roviny mají společné zaměření a nebo směrový vektor přímky rovnoběžné s rovinou patří do zaměření této roviny.

U rovnoběžných podprostorů $\mathcal{A}_h || \mathcal{A}_k$ rozlišujeme, zda je jejich průnik prázdná či neprázdná množina:

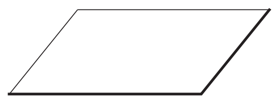
1) $h = k$

$\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_k = \emptyset$:



nebo

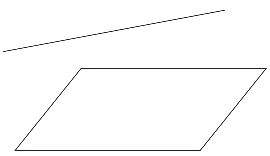
$\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_k$:



TOTOŽNÉ

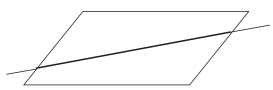
2) $h < k$

$\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_k = \emptyset$:



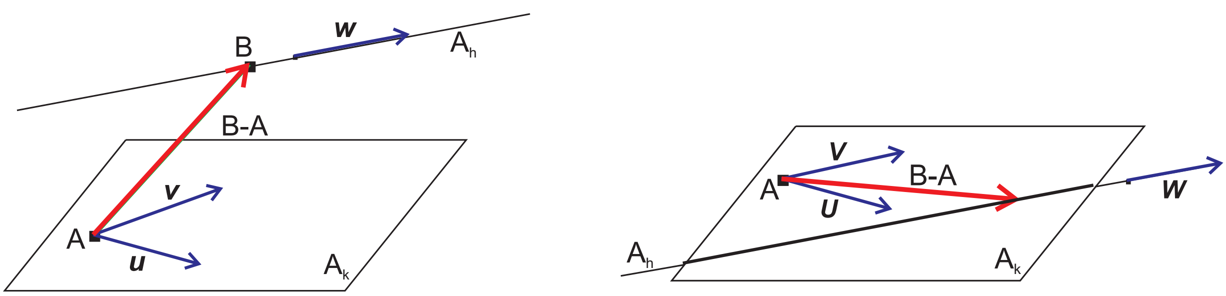
nebo

$\mathcal{A}_h \subseteq\subseteq \mathcal{A}_k$:



INCIDENTNÍ

Naším cílem je formulovat obecný postup (algoritmus) určení rovnoběžných podprostorů (viz věta 38). Při identifikaci toho, zda mají dva rovnoběžné podprostory



$B - A \notin V_k$ $\qquad$ $B - A \in V_k$

Obrázek 44: $\mathcal{A}_h || \mathcal{A}_k$ jsou **incidentní** $\Leftrightarrow$ $B - A \in V_k$

$A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ prázdný či neprázdný průnik, tj. při rozlišení mezi neincidentními a incidentními rovnoběžnými podprostory, hraje významnou roli vektor $B - A$. Z Obr. 44 je patrné, že dva rovnoběžné podprostory $A_h \| A_k$, kde $h < k$, jsou *incidentní* právě tehdy, když $B - A \in V_k$.

Poznámka. Mají-li incidentní podprostory stejnou dimenzi, nazýváme je **totožné** nebo **splývající** podprostory.

Věta 38 (Rovnoběžnost a incidence)**.** *Dva afinní bodové podprostory, dané parametricky rovnicemi*

$$A_h : X = A + \sum_{i=1}^{h} t_i \vec{u}_i, \qquad A_k : Y = B + \sum_{j=1}^{k} r_j \vec{v}_j, \quad h \leq k,$$

jsou **rovnoběžné***, právě když vektory $\vec{u}_i$ náleží do podprostoru $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k]$, tj.*

$$\vec{u}_i \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k], \; i = 1, 2, \ldots, h.$$

Jsou **incidentní***, jestliže současně do tohoto podprostoru patří i vektor $B - A$, tj.*

$$B - A \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k].$$

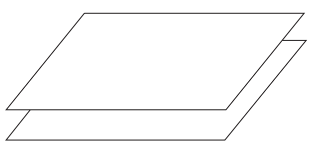
PŘÍKLAD 17.3. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ :*

a) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= -2, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= 1 - r - 2s, \end{aligned}$$

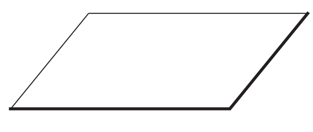
b) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 4 + 3t \\ x_3 &= -3 - 4t, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 3 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= -r - 2s. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 17.4. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin $\rho: \; x + y + 2z - 7 = 0$, $\quad \sigma:$ $x + y + 2z - 5 = 0$.*

V případě dvou *rovin* (obecně *nadrovin*) snadno rozhodneme o jejich rovnoběžnosti, případně totožnosti, porovnáním jejich obecných (neparametrických) rovnic:



$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$
$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + ... + ka_nx_n + b_0 = 0$$



$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$
$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + ... + ka_nx_n + ka_0 = 0$$

17.2 Spojení podprostorů

Důležitou roli v dalším rozboru vzájemných poloh afinních bodových podprostorů bude hrát pojem *spojení podprostorů*, který budeme používat v souvislosti s vektorovými i bodovými podprostory. Zjednodušeně můžeme říci, že spojením dvou podprostorů rozumíme „nejmenší“ podprostor, který obsahuje tyto dva podprostory.

Například spojením dvou vektorových podprostorů $U = [\vec{u}], V = [\vec{v}]$ je vektorový podprostor $W = [\vec{u}, \vec{v}]$. Značíme

$$W = U \bigvee V.$$

Spojením dvou bodových podprostorů $P = [A, \vec{a}], Q = [B, \vec{b}]$ je potom afinní bodový podprostor $R = [A, \vec{a}, \vec{b}, B - A]$. Značíme

$$R = P \bigvee Q.$$

Definice 34 (Spojení dvou vektorových podprostorů). *Spojením dvou vektorových podprostorů $V_h = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_h]$, $V_k = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k]$ vektorového prostoru V_n rozumíme jeho podprostor $V_s \subseteq\subseteq V_n$, pro který platí*

$$V_s = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k].$$

Zapisujeme

$$V_s = V_h \bigvee V_k.$$

Věta 39 (O dimenzi spojení a průniku.). *Nechť V_h, V_k jsou podprostory vektorového prostoru V_n. Potom:*

$$\dim (V_h \bigvee V_k) + \dim (V_h \cap V_k) = \dim V_h + \dim V_k.$$

Poznámka. Při zkoumání vzájemných poloh bodových podprostorů výše uvedený vztah nahradíme stručnějším zápisem

$$s + p = h + k,$$

kde $h = \dim V_h$, $k = \dim V_k$, $p = \dim (V_h \cap V_k)$ a $s = \dim (V_h \bigvee V_k)$.

PŘÍKLAD 17.5. *Určete dimenzi podprostoru $W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq R^4$, jestliže $W_1 = [(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2)]$, $W_2 = [(-3, 0, 2, 0)]$.*

Definice 35 (Spojení bodových podprostorů). *Spojením dvou afinních bodových podprostorů $A_h = [A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_h]$ $A_k = [B, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k]$ prostoru A_n rozumíme takový jeho podprostor A_g, pro který platí*

$$A_g = [A; V_g]\,,$$

kde $V_g = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, B - A]$. Zapisujeme

$$A_g = A_h \bigvee A_k.$$

PŘÍKLAD 17.6. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením dvou mimoběžných přímek.*

PŘÍKLAD 17.7. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením roviny A_2 a přímky A_1 s ní rovnoběžné.*

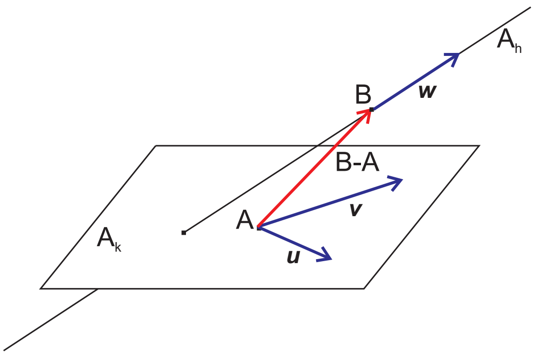
Poznámka. Z definice 35 vyplývá, jaký je vztah mezi dimenzí g spojení dvou afinních bodových podprostorů a dimenzí s spojení jejich zaměření:

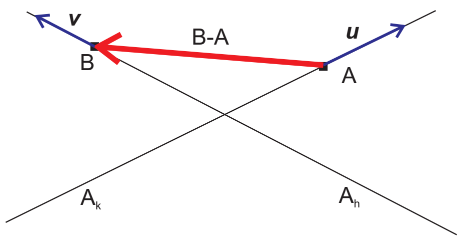
$$A_h \cap A_k = \emptyset \Rightarrow g = s + 1 \qquad (B - A \notin V_s)$$
$$A_h \cap A_k \neq \emptyset \Rightarrow g = s \qquad (B - A \in V_s)$$

PŘÍKLAD 17.8. *Určete dimenzi spojení rovin* $\left[A; \vec{t}, \vec{u}\right]$, $[B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [3, 2, -1, 0]$, $\vec{t} = (2, -1, 3, 1)$, $\vec{u} = (0, -1, 3, -2)$, $B = [4, 2, 0, 0]$, $\vec{v} = (-2, -2, 0, 5)$, $\vec{w} = (-2, -1, 0, 1)$.

17.3 Různoběžné a mimoběžné podprostory

Různoběžné prostory

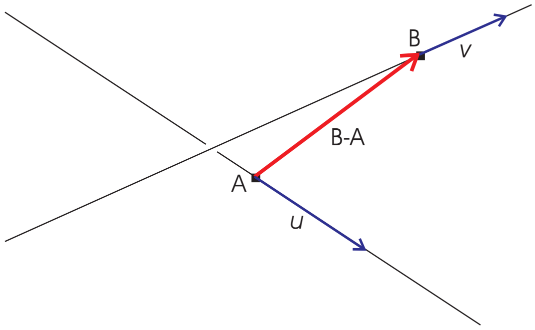




Je zřejmé, že $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, ale v obou případech platí:

$$B - A \in V_h \bigvee V_k.$$

Mimoběžné prostory



Je zřejmé, že tentokrát platí: $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, a zároveň:

$$B - A \notin V_h \bigvee V_k.$$

Věta 40 (Průnik afinních bodových podprostorů)**.** *Dva afinní bodové podprostory $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [B; V_k]$ prostoru A_n mají společný aspoň jeden bod, právě když pro vektor $B - A$ platí:*

$$B - A \in V_s,$$

kde $V_s = V_h \bigvee V_k$.

PŘÍKLAD 17.9. *Určete souřadnice průsečíku přímky p s rovinou ρ :*
$p = [A; \vec{u}]$; $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$;
$\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$; $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

$\{[-1, 0, -3]\}$

PŘÍKLAD 17.10. *V afinním prostoru A_4 určete vzájemnou polohu roviny $\rho = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$ a nadroviny $A_3 = [B; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$* : $A = [3, 3, -1, 3]$, $\vec{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, -1, 0)$, $B = [1, 4, -6, 2]$, $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 3, 1)$.

17.4 Klasifikace vzájemných poloh dvou bodových podprostorů

Budeme zkoumat, jaké vzájemné polohy mohou zaujmout dva dané bodové podprostory A_h, A_k afinního bodového prostoru A_n. Například, jaké vzájemné polohy mohou mít dvě roviny v prostoru A_4. Najdeme odpověď i na otázku, zda mohou být v nějakém prostoru dvě roviny mimoběžné.

Použijeme toto značení:

$$A_h = [A; V_h], \quad A_k = [B; V_k], \quad h \leq k \leq n,$$

$$V_s = V_h \bigvee V_k, \quad V_p = V_h \cap V_k, \quad A_g = A_h \bigvee A_k.$$

Použijeme tyto vztahy:

$$h + k = s + p, \qquad n \geq g, \qquad g = s \text{ nebo } g = s + 1.$$

Zajímá nás vztah mezi n a k

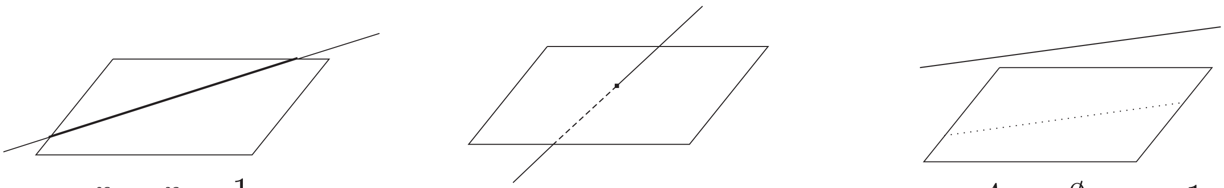
Poznámka. Důležitou roli při klasifikaci vzájemných poloh bodových podprostorů hraje roli dimenze p průniku jejich zaměření, která poukazuje na společné směry těchto zaměření. Hodnoty p mohou být v rozsahu od 0 do h (pokud $h < k$).

Jakých hodnot nabývá dimenze r průniku bodových podprostorů?

$$A_r = A_h \cap A_k$$

Dimenze **průniku bodových podprostorů** r nemusí být vždy stejná jako dimenze **průniku jejich zaměření** p.

Pokud jsou bodové podprostory A_h, A_k incidentní, tj. $A_h \subseteq\subsetneq A_k$ (nebo naopak $A_k \subseteq\subsetneq A_h$), nebo jsou A_h, A_k různoběžné, potom je dimenze jejich průniku $A_h \cap A_k$ stejná jako dimenze průniku jejich zaměření $V_h \cap V_k$, tj. $r = p$.



$r = p = 1$ $\qquad$ $r = p = 0$ $\qquad$ $A_r = \emptyset,\ p = 1$

PŘÍKLAD 17.11. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky a roviny*

Řešení: viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 45.

PŘÍKLAD 17.12. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin A_h, A_k; $h = k = 2$.*

Řešení: viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 46.

17.5 Další příklady na vzájemné polohy afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 17.13. *V afinním prostoru A_4 určete vzájemnou polohu rovin* $\rho = \left[A; \vec{t}, \vec{u}\right]$, $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [4, 2, 2, 2]$, $\vec{t} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{u} = (1, 0, 3, 2)$, $B = [-2, -2, 2, 0]$, $\vec{v} = (-1, 0, 5, 0)$, $\vec{w} = (2, 2, 1, 0)$.

PŘÍKLAD 17.14. *Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ v A_3 :*
$p:\ x = 2 + 4t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - t;\ t \in R,$
$\rho:\ 4x + y - z + 13 = 0.$

PŘÍKLAD 17.15. *Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny ρ, σ v A_3 :*
$\rho:\ 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \quad \sigma:\ 3y + 3z - 6 = 0.$

PŘÍKLAD 17.16. *Napište parametrické rovnice přímky p, která je průsečnicí rovin* $\rho:\ 5x + y + 2z - 29 = 0$, $\sigma:\ 3x - y + z - 10 = 0$.

PŘÍKLAD 17.17. *V A_4 určete podprostor určený nadrovinami:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 5 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

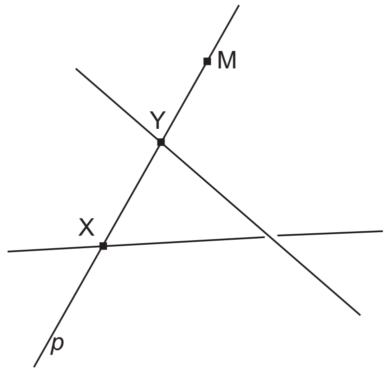
18 Příčky mimoběžných podprostorů

Příčkou mimoběžných podprostorů A_h, A_k prostoru A_n rozumíme přímku p, která je s každým z podprostorů A_h, A_k různoběžná, tj. má s každým z nich společný bod.

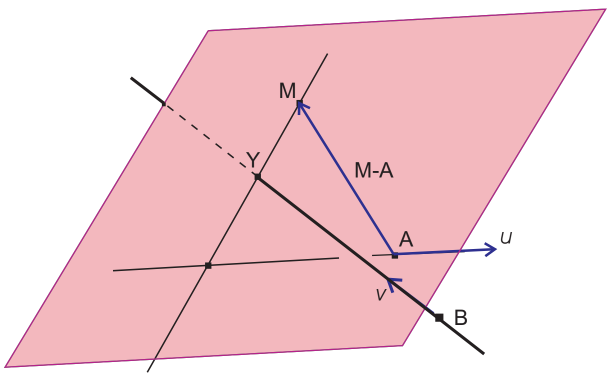
PŘÍKLAD 18.1. *Určete příčku mimoběžek $[A;\vec{u}]$, $[B;\vec{v}]$ procházející bodem M. Určete průsečíky příčky p s danými mimoběžkami;*
$A = [3, -1, 4]$, $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $B = [-1, 2, -2]$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $M = [1, 3, -2]$.

Řešení: K řešení úlohy můžeme přistoupit dvěma způsoby:

1) $X - M = k(Y - M)$; $X \in [A;\vec{u}]$, $Y \in [B;\vec{v}]$,



2) $B + t\vec{v} = M + r\vec{u} + s(M - A)$



PŘÍKLAD 18.2. *Určete příčku mimoběžek $p = [A;\vec{u}]$, $q = [B;\vec{v}]$ tak, aby měla směr $\vec{w}$;*
$A = [-1, 1, -5]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $B = [1, -2, 3]$, $\vec{v} = (1, 3, -1)$, $\vec{w} = (1, -2, 3)$.

Řešení:

$Y - X = k\vec{w}$

$B + r\vec{v} - A - t\vec{u} = k\vec{w}$

19 Eukleidovský bodový prostor

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován *skalární součin*. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy *norma vektoru* a *odchylka vektorů*. Ty nyní využijeme k zavedení pojmů *vzdálenost bodů*, *vzdálenost podprostorů*, *odchylka podprostorů*. Vektorový a vnější součin potom již známým způsobem (viz str. 87–95) využijeme k výpočtu obsahů a objemů a zavedeme si nový pojem *objem simplexu*.

19.1 Vzdálenost dvou bodů

Definice 36 (Vzdálenost bodů)**.** *Vzdálenost dvou bodů A, B v eukleidovském bodovém prostoru E_n je rovna normě jimi určeného vektoru $B - A$. Zapisujeme*

$$|AB| = |B - A| = \sqrt{(B - A)^2}.$$

Vzdálenost bodů v E_n má následující vlastnosti:
1) $|AB| = |BA|$,
2) $|AB| \geq 0$, $|AB| = 0$ právě když $A = B$,
3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$ (Trojúhelníková nerovnost),

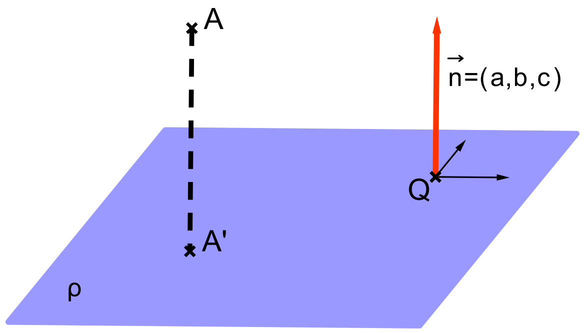
kde $A, B, C \in E_n$.

Z výhodnosti ortonormální báze pro výpočet skalárního součinu zmíněné na str. 60 vyplývá její výhodnost i pro výpočet vzdálenosti dvou bodů. V eukleidovském prostoru tak vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$, jejichž souřadnice jsou dány vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic (viz Def. 26, str. 104), počítáme dle vztahu

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2},$$

bez ohledu na definici použitého skalárního součinu.

19.2 Vzdálenost bodu od roviny



Vzdálenost $|A\rho|$ bodu A od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do roviny ρ, tj.

$$|A\rho| = |AA'|.$$

Pro vzdálenost bodu A od roviny ρ, určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$, potom platí:

$$|A\rho| = \frac{|(A-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{130}$$

PŘÍKLAD 19.1. *Určete vzdálenost bodu* $A=[3,6,1]$ *od roviny* $x+10y+7z-78=0$.

Poznámka. Pravou stranu vztahu (130) pro $|A\rho|$ můžeme interpretovat jako velikost kolmého průmětu vektoru $A-Q$ do směru vektoru $\vec{n}$.

Stejný vztah jako (130) platí i pro vzdálenost bodu A od nadroviny E_{n-1} určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$:

$$|AE_{n-1}| = \frac{|(A-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{131}$$

Obecná rovnice roviny v E_3/nadroviny v E_n

Vztah (130) nás může inspirovat k odvození dalšího způsobu zápisu a výpočtu obecné (neparametrické) rovnice roviny (nadroviny). Stačí, když si uvědomíme, že právě jenom pro body X roviny ρ platí, že jejich vzdálenost od této roviny je rovna nule, tj.

$$|X\rho| = \frac{|(X-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = 0.$$

Potom obecnou (neparametrickou) rovnici roviny v E_3 můžeme zapsat vztahem

$$(X-Q)\cdot\vec{n} = 0, \tag{132}$$

kde Q je bod roviny, $\vec{n}$ je normálový vektor roviny a $X=[x_1,x_2,x_3]$ je obecný bod roviny.

PŘÍKLAD 19.2. *Napište rovnici roviny, která je určená body* $A=[1,-2,3]$, $B=[-4,5,6]$, $C=[7,8,-9]$.

Řešení: Definujeme vektory $\vec{u}=B-A=(-5,7,3), \vec{v}=C-A=(6,10,-12)$ a vypočítáme normálový vektor $\vec{n}$ dané roviny jako jejich vektorový součin $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(57,21,46)$. Potom obecnou rovnici roviny ABC zapíšeme dle (132) ve tvaru

$$([x,y,z]-[1,-2,3])\cdot(57,21,46)=0,$$

odkud po úpravě levé strany dostaneme rovnici v algebraickém tvaru

$$57x+21y+46z-153=0.$$

Poznámka. Dáme-li dohromady vztahy (130) a (132), dostaneme následující vzoreček pro výpočet vzdálenosti bodu $A=[a_1,a_2,a_3]$ od roviny $\rho: ax+by+cz+d=0$, dobře známý ze střední školy:

$$|A\rho| = \frac{|aa_1+ba_2+ca_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{133}$$

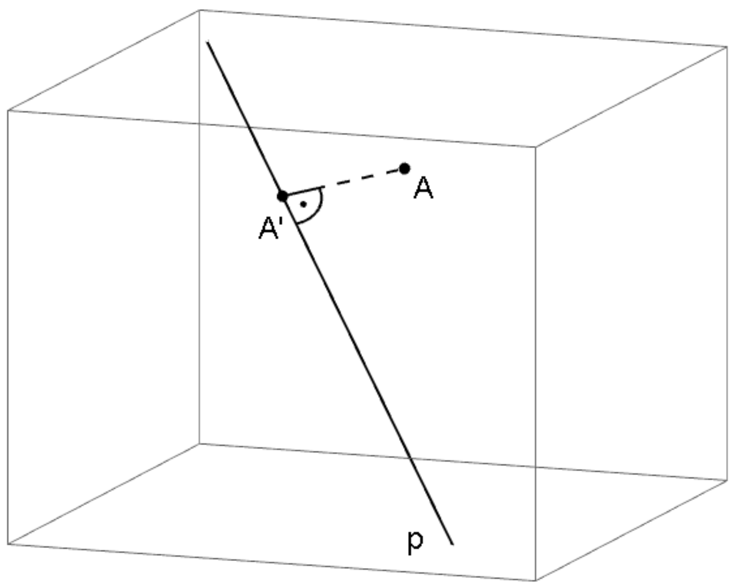
Stejným vztahem jako (132) zapíšeme i obecnou (neparametrickou) rovnici nadroviny, kde Q je potom bod nadroviny, $\vec{n}$ je vektor kolmý na nadrovinu ($\vec{n} \in V_{n-1}^{\perp}$) a $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ je obecný bod nadroviny.

19.3 Vzdálenost bodu od podprostoru

Vzdálenost bodu A od bodového podprostoru E_k je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do tohoto podprostoru.

PŘÍKLAD 19.3. *V eukleidovském prostoru E_3 určete vzdálenost bodu $A = [7, 9, 7]$ od přímky $p : x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t; t \in R$.*

Řešení: Viz Obr. 45. Pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku p, bod $A' =$



Obrázek 45: Jaká je vzdálenost bodu A od přímky p?

$[a_1', a_2', a_3']$, náleží přímce p, proto musí existovat hodnota parametru $t \in R$ taková, že pro její souřadnice platí vztahy $a_1' = 2 + 4t, a_2' = 1 + 3t, a_3' = 2t$. Zároveň musí být vektor $A' - A$ kolmý k směrovému vektoru $\vec{u} = (4, 3, 2)$ přímky p, tj. musí být splněna rovnice

$$(A' - A) \cdot \vec{u} = 0.$$

Po dosazení za A' dostaneme

$$((2 + 4t, 1 + 3t, 2t) - (7, 9, 7)) \cdot (4, 3, 2) = 0,$$

tj.

$$(-5 + 4t, -8 + 3t, -7 + 2t) \cdot (4, 3, 2) = 0.$$

Odtud po výpočtu skalárního součinu a zjednodušení dostáváme lineární rovnici

$$29t - 58 = 0,$$

jejímž řešením je $t = 2$. Bod A' má potom souřadnice $A' = [10, 7, 4]$ a jeho vzdálenost od A je rovna
$$|AA'| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$
To je také údaj o vzdálenosti bodu A od přímky p.

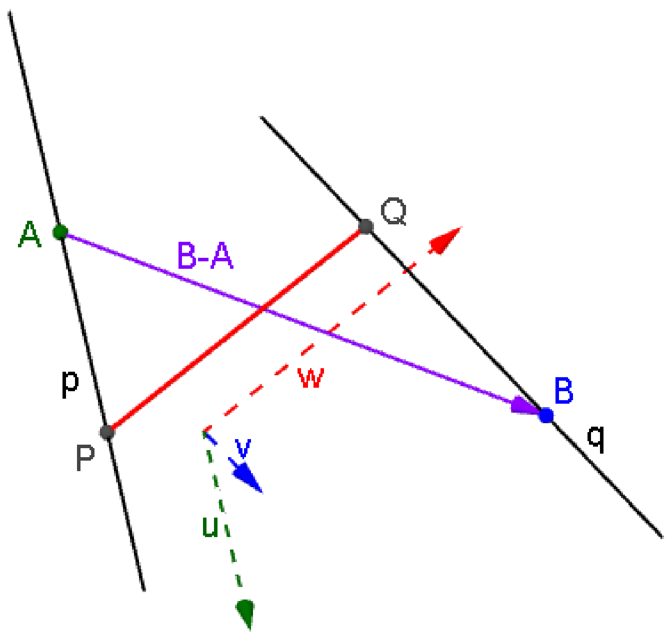
Poznámka. Pro řešení příkladu 19.3 můžeme použít také následující vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu A od přímky $p : X = Q + t\vec{u}; t \in R$ v prostoru E_3 :
$$|Ap| = \frac{|(Q - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}. \tag{134}$$
Pokuste se tento vzorec odvodit.

PŘÍKLAD 19.4. *V eukleidovském prostoru E_4 je dán bod $B = [7, 6, 11, 0]$ a rovina $\omega : X = M + k\vec{u} + l\vec{v}$, kde $M = [1, 1, 1, 1]$, $\vec{u} = (3, 2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 0)$. Napište vektorovou rovnici kolmice spuštěné z bodu B na rovinu ω a určete její průsečík B' s rovinou ω. Určete vzdálenost bodu B od roviny ω.*

19.4 Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3

PŘÍKLAD 19.5. *Určete vzdálenost dvou mimoběžek p, q v $E_3 : p : X = A + t\vec{u}$, $A =$* $[-2, -3, 2], \vec{u} = (4, 2, -1)$, $p : X = B + t\vec{v}, B = [1, 6, 2], \vec{v} = (0, 1, -1)$.

Řešení: Viz Obr. 46. Vzdálenost $v = |pq|$ dvou mimoběžek p, q je rovna délce jejich



Obrázek 46: Vzdálenost dvou mimoběžek p, q je rovna délce jejich nejkratší příčky PQ, která je kolmá k oběma přímkám.

nejkratší příčky PQ, která je kolmá k oběma přímkám, tj. má směr vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Vzdálenost v tak spočítáme jako velikost kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{AB}$ (případně úsečky AB) do směru vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$|pq| = \frac{|(A-B) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}. \tag{135}$$

Pro zadané údaje tak dostáváme hodnotu $|pq| = \dfrac{|(3,9,0) \cdot (-1,4,4)|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 4^2}} = \sqrt{33}.$

19.5 Vzdálenost dvou podprostorů v E_n

Pro každé dva podprostory E_r, E_s eukleidovského prostoru E_n, které nemají společný bod určitě existují body $A' \in E_r$ a $A'' \in E_s$ takové, že přímka $A'A''$ je kolmá k oběma podprostorům. *Vzdáleností podprostorů* E_r, E_s potom rozumíme vzdálenosti těchto bodů A', A''.

PŘÍKLAD 19.6. *V eukleidovském prostoru* E_4 *určete vzdálenost rovin* ω, ρ : $\omega : X = [3,5,-2,-3] + k(2,0,-1,-1) + l(0,4,-2,-3)$, $\rho : X = [1,5,-6,8] + k(2,1,2,0) + l(0,-1,1,1)$.

Poznámka. Řešíme stejně jako příklad 19.3.

19.6 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

PŘÍKLAD 19.7. *Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin* $\rho : 2x+3y-6z+14 = 0$, $\sigma : 2x + 3y - 6z - 35 = 0$.

Řešení: Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z nich, uvažujme například bod $K = [k_1, k_2, k_3] \in \rho$, od té druhé z nich, tj. v našem případě od σ. Uvažujme nejprve obecné rovnice příslušných rovin v obecném tvaru $\rho : ax + by + cz + d = 0$, $\sigma : ax + by + cz + e = 0$ (Jsou-li roviny rovnoběžné, koeficienty u prvních tří členů obou rovnic se shodují, nebo se liší o násobek nějakým nenulovým číslem k. V takovém případě stačí příslušnou rovnici tímto k vydělit a bude platit první varianta, že koeficienty u prvních tří členů se shodují.). Podle vztahu (133) platí

$$|K\sigma| = \frac{|ak_1 + bk_2 + ck_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{136}$$

Protože bod K náleží rovině ρ, musí jeho souřadnice splňovat rovnici této roviny, tj. platí $ak_1 + bk_2 + ck_3 + d = 0$. Odtud vyjádříme $ak_1 + bk_2 + ck_3 = -d$ a dosadíme do (136), dostaneme vztah pro výpočet vzdálenosti $|\rho\sigma|$ dvou rovnoběžných rovin ρ, σ, daných obecnými rovnicemi $\rho : ax + by + cz + d = 0$, $\sigma : ax + by + cz + e = 0$:

$$|\rho\sigma| = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pokud je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$, uvedený vztah se zjednoduší na pěkný tvar:

$$|\rho\sigma| = |d - e|.$$

Poznámka. *Vzdálenost dvou rovnoběžných podprostorů prostoru* E_n. Jsou-li E_r, E_s dva rovnoběžné podprostory v E_n, a platí-li $r \geq s$, pak je vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in E_s$ od podprostoru E_r. Jako příklad můžeme uvažovat vzdálenost přímky rovnoběžné s rovinou od této roviny.

20 Odchylka podprostorů

20.1 Odchylka dvou přímek

Pro určení odchylky dvou přímek využíváme odchylku jejich směrových vektorů. Již víme, že hodnoty těchto dvou odchylek se mohou lišit (v tom případě je jejich součtem 180°). Pro jejich výpočty používáme následující vztahy.

Odchylka dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$

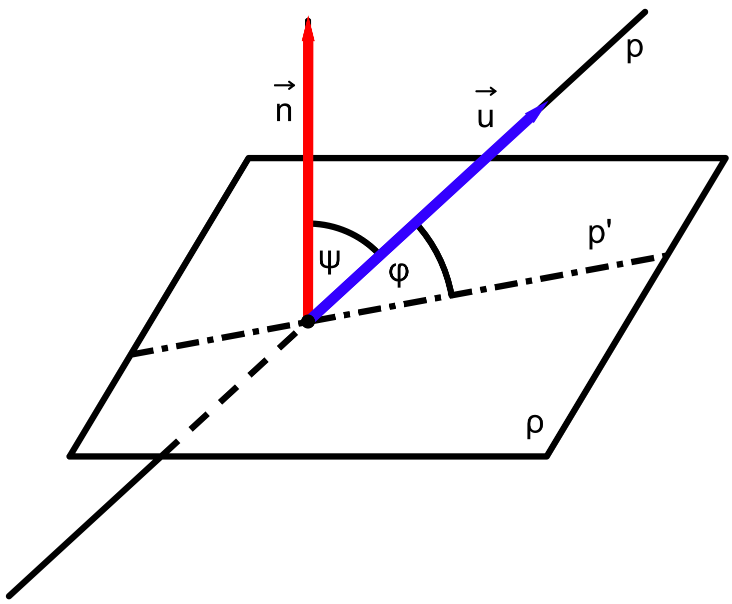
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Odchylka dvou přímek (různoběžek, mimoběžek) se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

PŘÍKLAD 20.1. *Určete odchylku dvou přímek p, q : p : $X = A + t\vec{u}$; $A = [1, 3, -1], \vec{u} = (1, 1, 2)$, q : $X = B + s\vec{v}$; $B = [1, 1, 0], \vec{v} = (3, -2, 1)$.*

20.2 Odchylka přímky od roviny v E_3



Odchylkou přímky p od roviny ρ rozumíme odchylku φ přímky p od jejího kolmého průmětu p' do roviny ρ. Úhel ψ představuje odchylku přímky p od směru normály roviny ρ. Potom platí $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ a tak ze vztahu pro výpočet odchylky přímky p a normály roviny ρ

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

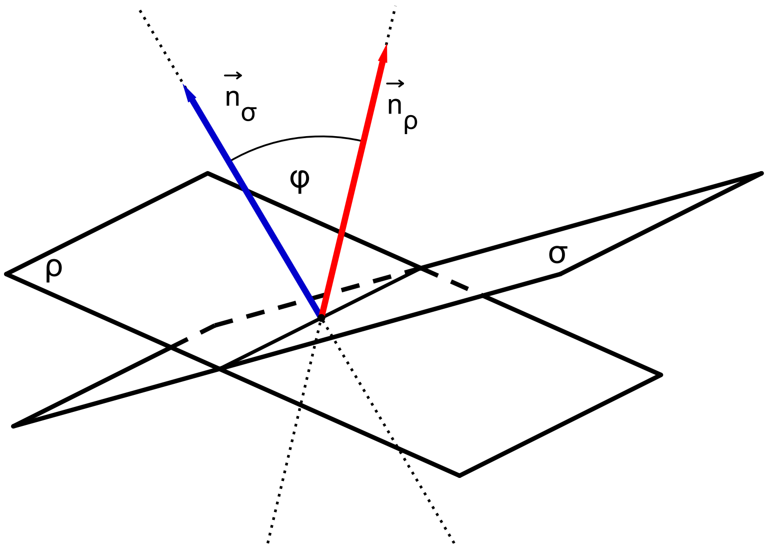
získáme vztah pro výpočet odchylky přímky a roviny

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|},$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ρ.

PŘÍKLAD 20.2. *Určete odchylku přímky AB od roviny ρ : $A = [2, 3, -1]$, $B = [3, 7, 4]$, $\rho : 2x - 3y + z + 4 = 0$.*

20.3 Odchylka dvou rovin v E_3



Odchylkou dvou rovin (nadrovin) v E_3 (E_n) rozumíme odchylku jejich normálových přímek (ortogonálních doplňků).

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho||\vec{n}_\sigma|} \tag{137}$$

Uvažujme roviny $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$, $\sigma = [B; \vec{w}, \vec{z}]$. Potom pro výpočet jejich odchylky φ můžeme modifikovat vzorec (137) na tvar:

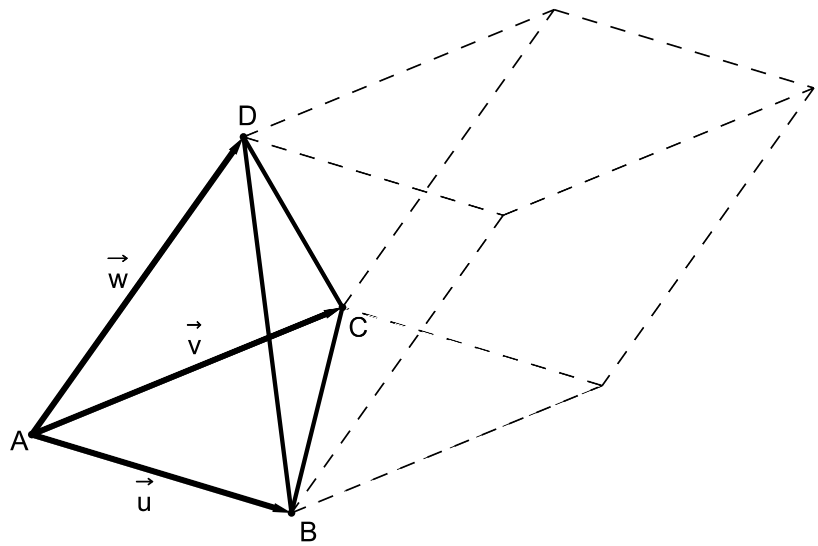
$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z})|}{|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}\times\vec{z}|}$$

PŘÍKLAD 20.3. *V prostoru E_3 určete odchylku φ daných podprostorů E_2', E_2'': $E_2' = [A, \vec{u}, \vec{v}]$; $A = [1, 0, 0], \vec{u} = (1, 1, 2), \vec{v} = (3, 1, 1)$, $E_2'' : x - 2y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 20.4. *V eukleidovském prostoru E_5 určete odchylku nadrovin ω, ρ : $\omega : x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 3 = 0$, $\rho : -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 7 = 0$.*

21 Objem simplexu

PŘÍKLAD 21.1. *Určete objem čtyřstěnu s vrcholy* $A = [3, 4, 0]$, $B = [9, 5, -1]$, $C = [1, 7, 1]$, $D = [3, 2, 5]$.

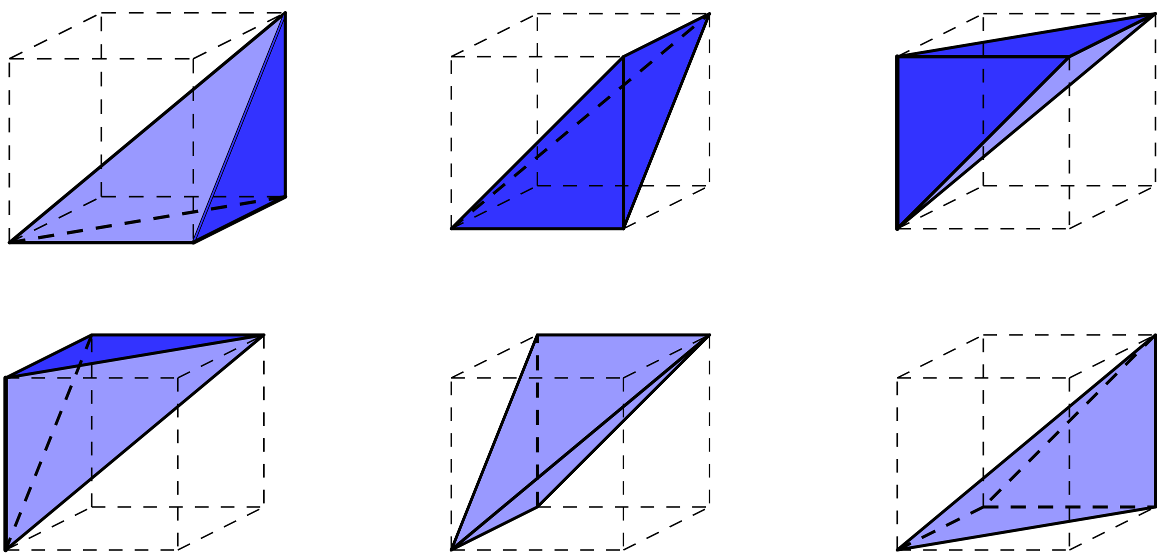


Umíme spočítat objem odpovídajícího rovnoběžnostěnu:

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = |[B - A,\ C - A,\ D - A]|.$$

Otázkou je, jak souvisí objem čtyřstěnu s objemem rovnoběžnostěnu? Odpověď souvisí s řešením následujícího problému.

PROBLÉM: Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů téhož objemu můžeme rozřezat krychli?

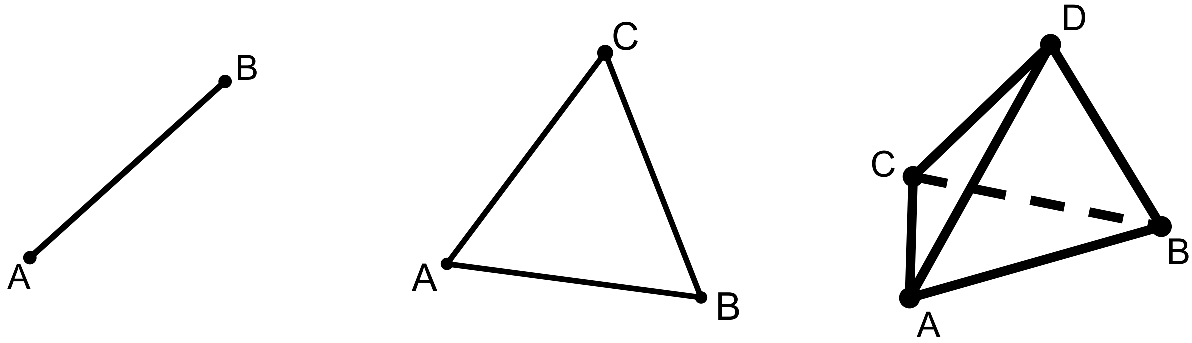


Objem čtyřstěnu $ABCD$:

$$V(A, B, C, D) = \frac{1}{6}|[B - A,\ C - A,\ D - A]|.$$

Simplex

„simplex“ = lat. „jednoduchý“



Simplex = konvexní obal $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n. Přitom konvexním obalem množiny bodů rozumíme průnik všech konvexních množin, které tyto body obsahují.

Definice 37 (Objem simplexu)**.** *Objemem simplexu, který je určen $n+1$ body $A_1, A_2, ..., A_{n+1} \in E_n$, rozumíme číslo:*

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left| [A_1 - A_{n+1},\ ...,\ A_n - A_{n+1}] \right|.$$

Pro vyjádření objemu simplexu můžeme použít i tento vztah:

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

E_2 : **Obsah trojúhelníku** ABC

$$V(A,B,C) = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Poznámka. Heronův vzorec.[1]

E_3 : **Objem čtyřstěnu** $ABCD$

$$V(A,B,C,D) = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Poznámka. Eulerova čtyřbodová relace.[1]

[1] Pro podrobnější studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf