Cvičení:
Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy. Pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustav.

(a)
$$\begin{aligned} x-2y &= 1\\ 3x+2y &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}]\}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x+y+3z &= 1\\ x+4y-2z &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[1-2t,-1+t,t]\}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+y-2z &= -3\\ 2x-y+3z &= 7\\ x-2y+5z &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(d)
$$\begin{aligned} x-2y+z &= 6\\ 2x+y-3z &= -3\\ x-3y+3z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1,-2,1]\}$$

(e)
$$\begin{aligned} x-2y+2z-w &= 3\\ 3x+y+6z+11w &= 16\\ 2x-y+4z+w &= 9 \end{aligned}$$
$$\{[5-2t,1,t,0]\}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x-2y+z &= 4\\ x+3y-4z &= -3\\ 2x-3y+5z &= 7\\ x-8y+9z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1,0,1]\}$$

(g)
$$\begin{aligned} 2x-6y+4z &= 2\\ -x+3y-2z &= -1 \end{aligned}$$
$$\{[1+3s-2t,s,t]\}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x+2y+3z &= 1\\ y+2z &= 3\\ 4x+5y+7z &= 15 \end{aligned}$$
$$\{[-\frac{15}{2},23,-10]\}$$

(i)
$$x + 2y = 0$$
$$\{[-2t, t]\}$$

(j)
$$x + 2y = 3$$
$$\{[3 - 2t, t]\}$$

(k)
$$x - 3y + 2z = 0$$
$$\{[3s - 2t, s, t]\}$$

(l)
$$x - 3y + 2z = 3$$
$$\{[3 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(m)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
$$\{[-t, -t, t]\}$$

(n)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$
$$\{[\frac{17}{3} - t, \frac{19}{3} - t, t]\}$$

(o)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(p)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right]$, (b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$, (c) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$,

(d) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array}\right]$, (e) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$, (f) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array}\right]$,

(g) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$, (h) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array}\right]$.

ŘEŠENÍ: (a) $\{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]\}$, (b) $\{[-7-2t, t, 2]\}$, (c) $\{[-8, 4+t, 8+2t, 1+t]\}$, (d) $\{[-3-11t, -1-t, 4+7t]\}$, (e) $\{[2-2s-5t, s, 1+t, 2t]\}$, (f) $\{[2t, -8+3t, t, 3]\}$, (g) $\{[1+3s-2t, s, t]\}$, (h) $\{[-5-3t, 19-4t, -6-2t, t]\}$.

3. Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:

a)
$$\begin{aligned} \alpha &: 3x + y - z - 7 = 0 \\ \beta &: x + 2y - 5z - 15 = 0 \\ \gamma &: 3x + 5y + 2z - 9 = 0, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \alpha &: x + y + z - 5 = 0 \\ \beta &: 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ \gamma &: 4x - y + 2z - 10 = 0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \alpha &: x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 3x - z - 6 = 0 \\ \gamma &: 7x - 4y - 5z - 16 = 0, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \alpha &: x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 2x - 4y + 2z - 2 = 0 \\ \gamma &: -5x + 10y - 5z + 5 = 0. \end{aligned}$$