Cvičení:
Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy. Pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustav.

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

$$\{[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}]\}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

$$\{[1 - 2t, -1 + t, t]\}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

$$\{\}$$

(d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ x - 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

$$\{[1, -2, 1]\}$$

(e)
$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - w &= 3 \\ 3x + y + 6z + 11w &= 16 \\ 2x - y + 4z + w &= 9 \end{aligned}$$

$$\{[5 - 2t, 1, t, 0]\}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$$

$$\{[1, 0, 1]\}$$

(g)
$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$

$$\{[-\frac{15}{2}, 23, -10]\}$$

(i)
$$x + 2y = 0$$
$$\{[-2t, t]\}$$

(j)
$$x + 2y = 3$$
$$\{[3 - 2t, t]\}$$

(k)
$$x - 3y + 2z = 0$$
$$\{[3s - 2t, s, t]\}$$

(l)
$$x - 3y + 2z = 3$$
$$\{[3 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(m)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
$$\{[-t, -t, t]\}$$

(n)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$
$$\{[\frac{17}{3} - t, \frac{19}{3} - t, t]\}$$

(o)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(p)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

$$\text{(a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right], \quad \text{(b)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right], \quad \text{(c)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right],$$

$$\text{(d)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array}\right], \text{(e)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \text{(f)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array}\right],$$

(g) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$, (h) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array}\right]$, (i) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right]$,

(j) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$.

ŘEŠENÍ: (a) $\{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]\}$, (b) $\{[-7 - 2t, t, 2]\}$, (c) $\{[-8, 4 + t, 8 + 2t, 1 + t]\}$, (d) $\{[-3 - 11t, -1 - t, 4 + 7t]\}$, (e) $\{[2 - 2s - 5t, s, 1 + t, 2t]\}$, (f) $\{[2t, -8 + 3t, t, 3]\}$, (g) $\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$, (h) $\{[-5 - 3t, 19 - 4t, -6 - 2t, t]\}$, (i) $\emptyset$, (j) $\{[-1, -2, 0]\}$.

3. Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:

a) $\begin{aligned} \alpha &: 3x + y - z - 7 = 0 \\ \beta &: x + 2y - 5z - 15 = 0 \\ \gamma &: 3x + 5y + 2z - 9 = 0, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \alpha &: x + y + z - 5 = 0 \\ \beta &: 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ \gamma &: 4x - y + 2z - 10 = 0, \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \alpha &: x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 3x - z - 6 = 0 \\ \gamma &: 7x - 4y - 5z - 16 = 0, \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \alpha &: x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 2x - 4y + 2z - 2 = 0 \\ \gamma &: -5x + 10y - 5z + 5 = 0. \end{aligned}$

4. Řešte dané soustavy lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$

g)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: (a) $[-1,-1,0,1]$; (b) $[1,2,1,-1]$; (c) $[1,2,3]$; (d) $[-2,2,-3,3]$; (e) $\emptyset$; (f) $[4-t,\frac{2}{3},t,-2t-\frac{7}{3}]$; (g) $[-\frac{1017}{175}+2t,-\frac{283}{175}+t,t,-\frac{8}{175}]$; (h) $[1,1,1,1]$; (i) $[1,-1,0,2]$; (j) $[2,0,-2,-2,1]$

5. U každé z daných soustav nejprve užitím Frobeniovy věty rozhodněte o její řešitelnosti, potom, jde-li to, ji vyřešte.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 24x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 3x_5 &= 3, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2, \\ 2x + y &= 1, \\ x + 2y + z &= -3, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 4x_1 + 11x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 7, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= -2, \\ x_2 + 3x_3 + x_5 + 5x_6 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 4x_6 &= 1. \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: viz `https://www.geogebra.org/m/CBD9Ts5Y`