1 Řešení soustav lineárních rovnic

1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ s reálnými koeficienty rozumíme rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{1}$$

kde koeficienty $a_1, a_2, ..., a_n, b$ jsou reálná čísla.
Označení „lineární“ vyjadřuje skutečnost, že každá z neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ se v rovnici vyskytuje nejvýše v první mocnině. Pokud by nejvyšší mocninou, v níž se v rovnici vyskytuje proměnná, byla mocnina druhá, resp. třetí, hovořili bychom o rovnici kvadratické, resp. kubické (případně o rovnici druhého, resp. třetího stupně).

V případě rovnic o jedné, dvou či třech neznámých používáme pro označení neznámých a koeficientů často i jiné symboly než v (1), např. neznámé označujeme x, y a z a koeficienty a, b, c a d:

$$ax = b, \qquad ax + by = c, \qquad ax + by + cz = d.$$

1.2 Soustava lineárních rovnic

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty (obecně s koeficienty z tělesa[1] T; potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2\\
&......\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{2}$$

Se soustavou (2) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[1] „Tělesem“ zde rozumíme algebraickou strukturu (již znáte algebraickou strukturu zvanou „grupa“). V kurzu lineární algebry a geometrie budeme pracovat výhradně s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Definice této algebraické struktury je uvedena v kapitole věnované vektorovému prostoru.

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

1.3 Maticový zápis soustavy

Užitím násobení matic můžeme soustavu (2) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

kde A je matice soustavy, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy.

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{b}$ můžeme chápat také jako matice. Pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{x}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (2) jako na rovnost **lineární kombinace sloupcových vektorů matice** A vektoru $\vec{b}$:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = \vec{b}.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme dva typy soustavy lineárních rovnic (2):

1) Pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$ hovoříme o **homogenní soustavě**, symbolicky ji zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = O).$$

2) Pro $\vec{b} \neq \vec{o}$ hovoříme o **nehomogenní soustavě**, kterou symbolicky zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \ \vec{b} \neq \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = B; \ B \neq O).$$

1.4 Řešitelnost soustavy - Frobeniova věta

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

PŘÍKLAD 1.1. *Rozhodněte o počtu řešení daných soustav. Potom je vyřešte a jejich řešení geometricky interpretujte.*

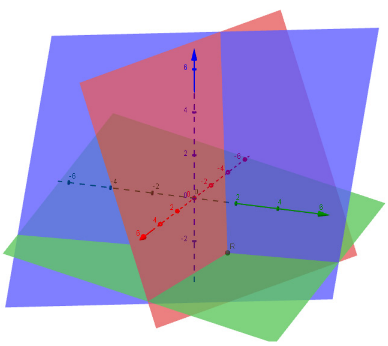
$$\text{a)} \quad \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7, \end{aligned} \qquad \text{b)} \quad \begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 1 \\ 3x + 6y + 9z &= 2, \end{aligned} \qquad \text{c)} \quad \begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3. \end{aligned}$$

Řešení:
Provedeme Gaussovu eliminaci rozšířené matice každé z daných soustav:

ad a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= 6 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$h(A) = h(A^*) = n$ (počet neznámých), soustava má jediné řešení (je regulární)



Obrázek 1: Řešení příkladu 1.1 a - tři roviny s jedním společným bodem

Řešení určíme například Gaussovou-Jordanovou eliminací (můžeme však použít také Cramerovo pravidlo, inverzní matici či přímé řešení soustavy):

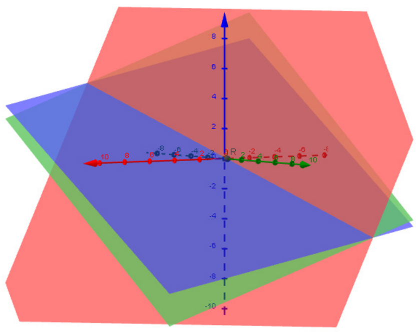
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $X = [1, 2, -2]$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako bod, který je společný třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 1.

ad b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

$h(A) = h(A^*) < n$ (počet neznámých), soustava má nekonečně mnoho řešení



Obrázek 2: Řešení příkladu 1.1 b - tři roviny se společnou přímkou

Řešení určíme ze soustavy (4), která odpovídá matici v Gaussově tvaru ekvivalentní s rozšířenou maticí dané soustavy:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

Neznámé x, y, které odpovídají prvním nenulovým prvkům každého řádku matice v Gaussově tvaru zůstanou neznámými (tzv. „základní“ neznámé), zatímco neznámou z nahradíme reálným parametrem t (nejsme schopni určit hodnoty více neznámých než je počet nezávislých rovnic, proto tuto třetí neznámou uvažujeme jako „volnou“):

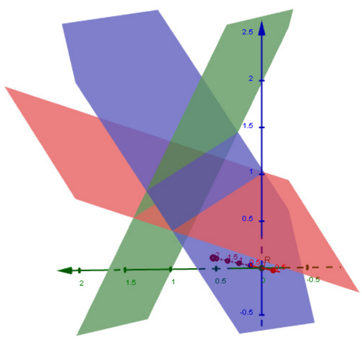
$$\begin{aligned} z &= t;\ t \in R \\ x + 3y &= 1 - 5t \\ 3y &= 1 - 6t \end{aligned}$$

Řešením soustavy je množina všech uspořádaných trojic $M = \{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]; t \in R\}$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako přímku, která je společná všem třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 2.

ad c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ y + 4z &= -1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

$h(A) < h(A^*)$, soustava nemá řešení



Obrázek 3: Řešení příkladu 1.1 c - tři roviny nemají společný průnik

Množina řešení dané soustavy je prázdná: $M = \emptyset$. Geometricky lze tento závěr interpretovat tak, že roviny odpovídající daným rovnicím nemají (všechny tři) žádný společný bod, viz Obr. 3.

Věta 1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow$ b je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Potom se jeho přidáním k matici tvořené vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ nemůže zvýšit její hodnost, tj. $h(A) = h(A^*)$. Symbolicky zapsáno: $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$.[2]

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspoň jedno řešení

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ $\Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$ $\square$

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n$ ... soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou $n-$tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n$ ... soustava má nekonečně mnoho řešení (tj. nekonečně mnoho uspořádaných $n-$tic, které tvoří nějaký „podprostor“, např. přímku nebo rovinu),

(iii) $h(A) \neq h(A^*)$ ... soustava nemá řešení.

PŘÍKLAD 1.2. *Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.*

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 4x + 3y - z &= 7, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

[2] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v partiích věnovaných pojmu „Vektorový prostor“.

1.5 Vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic

Množiny řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic a k ní příslušné homogenní soustavy spolu úzce souvisí. Zajímá nás povaha tohoto vztahu, a jak ho můžeme využít při řešení nehomogenních soustav.

PŘÍKLAD 1.3. *Řešte dané dané dvojice homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic.*

a) $$x + 2y = 0, \qquad\qquad x + 2y = 5,$$

e) $$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:
ad a)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-2t, t]; t \in R\} = \{t(-2, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - 2t, t]; t \in R\} = \{[5, 0] + t(-2, 1); t \in R\}.$$

ad b)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-t, -t, t]; t \in R\} = \{t(-1, -1, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - t, 6 - t, t]; t \in R\} = \{[5, 6, 0] + t(-1, -1, 1); t \in R\}.$$

Věta 2 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť R je libovolné řešení nehomogenní soustavy $AX = B$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $AX = O$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $AX = B$ platí:*

$$M = \{R + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Důkaz. (1) $\{R + \vec{u}\} \subseteq M$; $\quad A(R + \vec{u}) = AR + A\vec{u} = AR + \vec{o} = AR = B$

(2) $M \subseteq \{R+\vec{u}\}$; $\quad AQ = B, AR = B \Rightarrow A(Q-R) = O \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = Q-R \in W_A$ tak, že $AQ = A(R + \vec{u}) = B$. $\square$

Poznámka. Věta 2 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení R této soustavy a všech řešení $\vec{u}$ příslušné homogenní soustavy**.

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho R.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = R + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy tvoří tzv. **bodový prostor** (tj. je to množina bodů, také můžeme říci „množina míst“), zatímco množina všech řešení příslušné homogenní soustavy tvoří tzv. **vektorový prostor** (tj. je to množina vektorů, také můžeme říci „množina směrů“).

Prvky **bodového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 14 - Def. 2.1) nazýváme body. Každý bod, který je řešením nehomogenní soustavy, se dá vyjádřit jako součet jednoho konkrétního bodu a lineární kombinace vektorů (které jsou řešením příslušné homogenní soustavy).

Prvky **vektorového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 8 - Def. 1.1) nazýváme vektory. Každý vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace skupiny vektorů z téhož prostoru, kterou nazýváme **systém (množina) generátorů** daného vektorového prostoru.

Dimenze vektorového prostoru je číslo, které udává počet lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinací mohou vytvořit každý vektor uvažovaného prostoru. Systém generátorů v.p., který je tvořen lineárně nezávislými vektory se nazývá **báze** vektorového prostoru. Dimenze je tak rovna počtu vektorů báze daného vektorového prostoru. Bod (počátek) má dimenzi 0, přímka dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor má dimenzi 3.

1.6 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu lineárních rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly (tj. všechny rovnice v soustavě jsou homogenní). Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení - tzv. „triviální řešení“, které spočívá v tom, že za všechny neznámé dosadíme nuly (triviálním řešením je tedy uspořádaná $n-$tice tvořená samými nulami, též můžeme říci nulový vektor).

Pokud je matice homogenní soustavy regulární, tj. $h(A) = n$, má soustava jenom triviální řešení.

Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení a triviální řešení je jenom jedním z nich. Tímto případem homogenní soustavy se teď budeme zabývat.

PŘÍKLAD 1.4. *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \end{array} \tag{5}$$

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal (tj. množinu všech lineárních kombinací) dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 3. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť matice A této soustavy má hodnost $h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

K důkazu této věty nemáme zatím vytvořeny potřebné teoretické základy. Proto se zde provizorně opřeme o své dosavadní zkušenosti a k rigoróznímu důkazu se vrátíme, až budeme připraveni.

Již víme, že k nalezení hodnot k neznámých potřebujeme k nezávislých rovnic a neznámé, které jsou nad tento počet nahrazujeme (vesměs reálnými) parametry.

Tím vyjadřujeme, že jejich hodnoty jsou v daném oboru volné, hovoříme o *volných* neznámých. Počet parametrů pak určuje *dimenzi* prostoru řešení soustavy. A jak pro tuto dimenzi dostaneme vyjádření $n - h(A)$? Je-li hodnost matice (homogenní) soustavy A rovna $h(A)$, víme, že nezávislých rovnic soustavy je $h(A)$. Můžeme tedy určit hodnoty $h(A)$ neznámých. Z celkového počtu n ($n \geq h(A)$) tak zbývá právě $n - h(A)$ volných neznámých, které nahradím parametry a jejichž počet určuje dimenzi prostou řešení. Pokud například je $h(A) = n$, nemám žádnou volnou neznámou, řešením je jediná konkrétní uspořádaná $n-$tice, tj. bod, a dimenze prostoru řešení je $n - h(A) = 0$.

1.6.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 1.4. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}].$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 1.4:

1. Určíme tzv. základní neznámé
Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Soustava odpovídající výsledné matici v Gaussově tvaru má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0. \end{array} \tag{6}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé (”nezákladní” nebo též ”volné” neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{základní nezn.}: \quad x_1, x_2; \qquad \text{volné nezn.}: \quad x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (6) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (1.4) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 1.5. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{7}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2, 1, 0, 0, 0), (3, 0, 5, 1, 0), (7, 0, 12, 0, 1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2, 1, 0, 0, 0) + s(3, 0, 5, 1, 0) + t(7, 0, 12, 0, 1); \quad r, s, t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Poznámka. Z tvrzení věty 3 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

1.7 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Již víme, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní (viz Věta 2). Pokračujeme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (7) z příkladu 1.5.

PŘÍKLAD 1.6. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \tag{9}$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (8) příslušné **homogenní** soustavy (7):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$