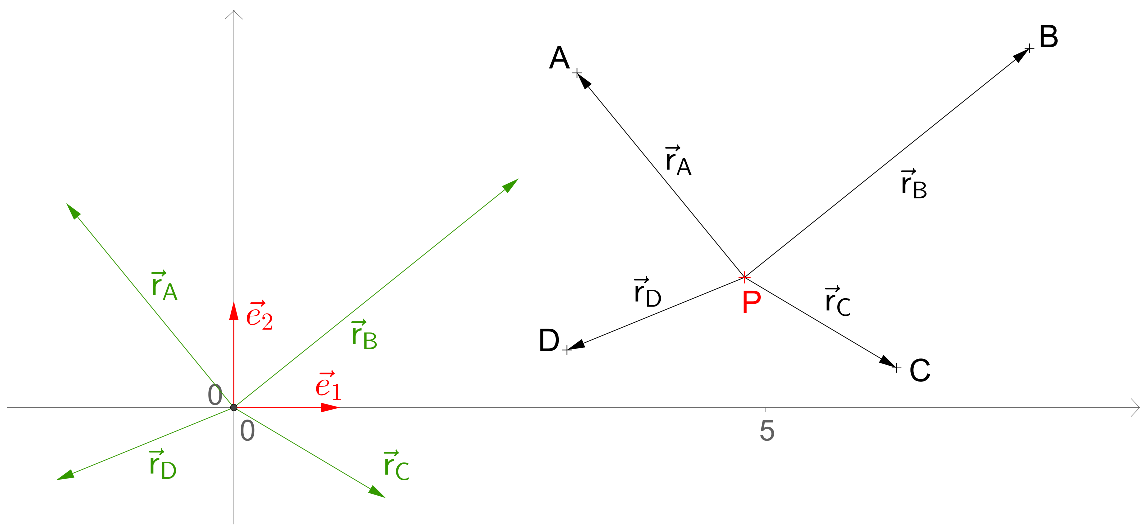
13.2 Afinní souřadnice bodů

Zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$ (106) zprostředkovává vztah mezi afinním bodovým prostorem A_n a příslušným vektorovým prostorem V, jeho zaměřením. Dvěma různým bodům je přiřazen vektor a naopak, bodu a vektoru je přiřazen bod. Kdyby toto zobrazení bylo vzájemně jednoznačné, mohli bychom ho využít k zavedení souřadnic v bodovém prostoru – bodům bychom přiřadili stejné souřadnice, jaké by měly jim odpovídající vektory. Bohužel tomu tak ale není, existuje nekonečně mnoho různých dvojic bodů, kterým je přiřazen stejný vektor.

Naštěstí je snadné tuto nejednoznačnost odstranit. Stačí zvolit jeden bod jako pevný, označme ho P, a každému bodu X bodového prostoru přiřadit vektor $g(P, X) = X - P$. Jak ilustruje Obr. 33, toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, dvěma různým bodům jsou přiřazeny dva různé vektory a každému vektoru odpovídá právě jeden bod:

$$\begin{aligned}
A - P &= \vec{r}_A & \longrightarrow \quad & A = P + \vec{r}_A,\\
B - P &= \vec{r}_B & \longrightarrow \quad & B = P + \vec{r}_B,\\
C - P &= \vec{r}_C & \longrightarrow \quad & C = P + \vec{r}_C,\\
D - P &= \vec{r}_D & \longrightarrow \quad & D = P + \vec{r}_D.
\end{aligned}$$



Obrázek 33: Zavedení afinní soustavy souřadnic (repéru)

Potom skutečně mohu každý bod bodového prostoru jednoznačně určit pomocí souřadnic příslušného vektoru (které udávám vzhledem k bázi zaměření V_n).

Poznámka. Vektor $\vec{r} = X - P$ nazýváme *radiusvektor* (též *průvodič*) bodu X. Viz vektory $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ na Obr. 33.

Definice 25 (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$ a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n. Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$. Bod P nazýváme počátek soustavy souřadnic.

Souřadnice bodu X vzhledem k repéru $\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ jsou tedy totožné se souřadnicemi vektoru $X - P$ vzhledem k bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ vektorového zaměření V_n. Jestliže $X - P = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, můžeme bod $P \in A_n$ zapsat rovnicí

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n, \tag{107}$$

případně ve zkráceném tvaru

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \tag{108}$$

a souřadnice bodu P zapíšeme

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\,. \tag{109}$$

Na vztahu (107) (příp. (108)) je založena definice *parametrického vyjádření afinního bodového prostoru a podprostoru*, významného prostředku matematického popisu těchto množin.

Poznámky.
1. Prostor se soustavou souřadnic φ zapisujeme:

$$A_n = [P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]\,.$$

2. Souřadnice bodů a vektorů někdy odlišujeme typem závorek

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \quad \text{ale} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

3. Souřadnice bodu a jeho radiusvektoru jsou stejné.

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{a} \quad \vec{r}_A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,.$$

4. Protože $P - P = (0, 0, \ldots, 0)$, počátek afinní soustavy souřadnic má souřadnice

$$P = [0, 0, \ldots, 0]\,.$$

PŘÍKLAD 13.3. *V afinní rovině A_2 je dán repér $\mathcal{R} = \{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Pro bod A platí $A = P - \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Určete jeho souřadnice vzhledem k $\mathcal{R}$.*

Řešení: Souřadnice bodu A vzhledem k repéru $\mathcal{R}$ jsou $A = [-1; 2]$.

13.3 Kartézská soustava souřadnic

Afinní bodový prostor na jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin nazýváme *Eukleidovský bodový prostor* a značíme ho E_n. V takovém bodovém prostoru můžeme zavést soustavu souřadnic (repér) $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, jejíž báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je ortonormální. Takovou soustavu nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic.*

Definice 26 (Kartézská soustava souřadnic)**.** *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic* $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$*, ve které* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ *je ortonormální bází.*

14 Afinní bodový podprostor

Ze všech možných podmnožin afinního bodového prostoru nás budou zajímat jenom takové, které samy splňují definici afinního bodového prostoru, budeme jim říkat *afinní bodové podprostory* (srovnejte se zavedením pojmu *vektorový podprostor* na str. 35).

Definice 27 (Afinní bodový podprostor)**.** *Neprázdnou podmnožinu* A_k *afinního bodového prostoru* A_n*, která je sama afinním bodovým prostorem (viz definice 24), nazýváme afinním bodovým podprostorem prostoru* A_n*. Zapisujeme*

$$A_k \subseteq\subseteq A_n.$$

Příklady afinních bodových podprostorů

(1) Samotný *afinní bodový prostor* A_n je svým podprostorem, $A_n \subseteq\subseteq A_n$.

(2) *Bod* (A_0), *přímka* (A_1), *rovina* (A_2) jsou typické podprostory prostorů A_2, A_3, kterými se budeme zabývat.

PŘÍKLAD 14.1. *Může být polorovina, úsečka, kruh bodovým podprostorem prostoru* A_2*?*

Řešení: Viz Obr. 34. Ověříme, jak uvedené množiny splňují definici 24. Nemusíme se zabývat otázkou existence zobrazení $g : A_k \times A_k \to V$. Ta je zaručena skutečností, že vyšetřované množiny jsou podmnožinami afinního bodového prostoru A_2. Stejně tak vlastnost *2* z definice je zřejmě splněna. Soustředíme se tedy na vlastnost *1.* Uvažujeme-li jako vektorové zaměření prostor V_2, je evidentní, že pro uvedené podmnožiny tato vlastnost není splněna. Bezesporu existují body každé z těchto množin a vektory z V_2, které když sečteme, dostaneme body, které do příslušné množiny nepatří. Příkladem je bod A poloroviny b spolu s vektorem $\vec{x}$ na Obr. 34. Vidíme, že bod $B = A + \vec{x}$ nepatří do poloroviny b, která tak nemůže být afinním bodovým