13.3 Kartézská soustava souřadnic

Afinní bodový prostor na jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin nazýváme *Eukleidovský bodový prostor* a značíme ho E_n. V takovém bodovém prostoru můžeme zavést soustavu souřadnic (repér) $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, jejíž báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je ortonormální. Takovou soustavu nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic.*

Definice 26 (Kartézská soustava souřadnic)**.** *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic* $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$*, ve které* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ *je ortonormální bází.*

14 Afinní bodový podprostor

Ze všech možných podmnožin afinního bodového prostoru nás budou zajímat jenom takové, které samy splňují definici afinního bodového prostoru, budeme jim říkat *afinní bodové podprostory* (srovnejte se zavedením pojmu *vektorový podprostor* na str. 35).

Definice 27 (Afinní bodový podprostor)**.** *Neprázdnou podmnožinu* A_k *afinního bodového prostoru* A_n*, která je sama afinním bodovým prostorem (viz definice 24), nazýváme afinním bodovým podprostorem prostoru* A_n*. Zapisujeme*

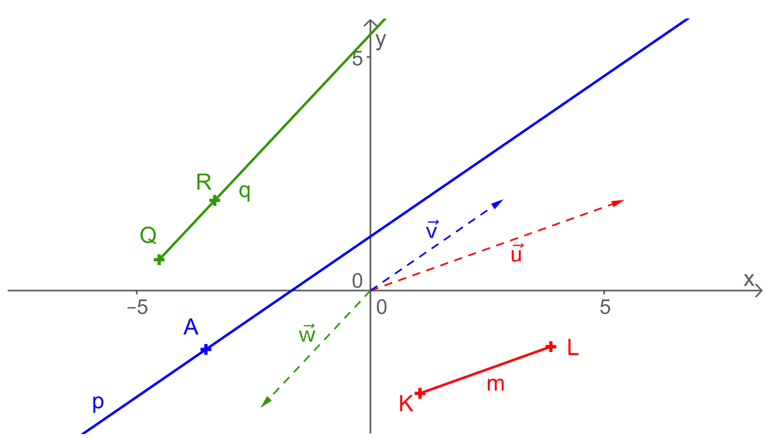
$$A_k \subseteq\subseteq A_n.$$

Příklady afinních bodových podprostorů

(1) Samotný *afinní bodový prostor* A_n je svým podprostorem, $A_n \subseteq\subseteq A_n$.

(2) *Bod* (A_0), *přímka* (A_1), *rovina* (A_2) jsou typické podprostory prostorů A_2, A_3, kterými se budeme zabývat.

PŘÍKLAD 14.1. *Může být polopřímka, úsečka, polorovina, kruh nebo trojúhelník bodovým podprostorem prostoru* A_2*?*



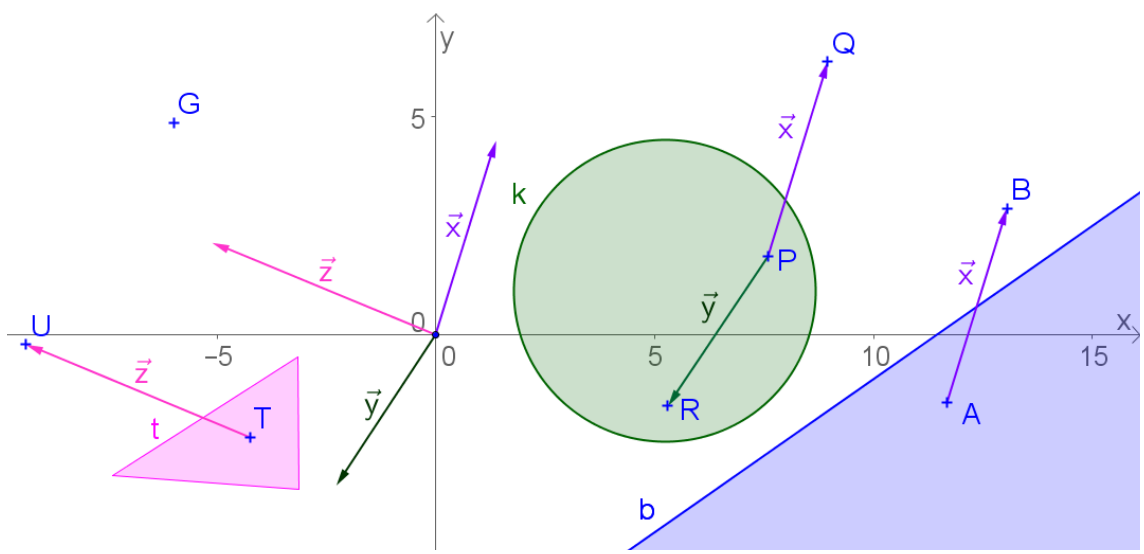
Obrázek 34: Je polopřímka q nebo úsečka m afinním bodovým podprostorem?

Řešení: Nejprve se zaměříme na polopřímku a úsečku, viz Obr. 34. Protože se jedná o části přímky, budeme jako jejich případná zaměření uvažovat vektorové prostory generované směrovými vektory odpovídajících přímek. V případě polopřímky $q = \overrightarrow{QR}$ uvažujeme vektorový prostor $U = [\vec{w}]$, v případě úsečky m pak vektorový prostor $V = [\vec{u}]$.

Nyní ověříme, jak polopřímka a úsečka jako množiny bodů splňují definici 24. Nemusíme se zabývat otázkou existence zobrazení $g: A_k \times A_k \to V$. Ta je zaručena skutečností, že vyšetřované množiny jsou podmnožinami afinního bodového prostoru A_2. Stejně tak vlastnost *2* z definice je zřejmě splněna. Soustředíme se proto na vlastnost *1*.

Z Obr. 34 je evidentní, že pro polopřímku a úsečku tato vlastnost není splněna. Vidíme, že v každé z těchto množin bezesporu existují body a v jim příslušejících vektorových prostorech vektory, které když sečteme, dostaneme body, které do těchto množin nepatří. Příkladem je bod K úsečky m spolu s vektorem $\vec{u}$ nebo bod R polopřímky q spolu s vektorem $\vec{w}$. Body $K + \vec{u}$, $R + \vec{w}$ rozhodně nenáleží úsečce m, respektive polopřímce q. Tyto podmnožiny bodového prostoru A_2 tak nemohou být afinními bodovými podprostory. Pro srovnání je na Obr. 34 přímka p určená bodem A a směrovým vektorem $\vec{v}$, která, jak již víme, definici 24 splňuje a je tedy afinním bodovým prostorem (s vektorovým zaměřením $V = [\vec{v}]$).

Ke stejnému závěru jako v případě polopřímky a úsečky dospějeme i u poloroviny, kruhu nebo trojúhelníku, viz Obr. 35. Pokud jako možné vektorové zaměření těchto množin uvažujeme vektorový prostor V_2, je z obrázku patrné, že opět v každé z množin existuje bod a ve vektorovém prostoru V_2 vektor tak, že jejich součet do množiny nepatří. Nejedná se tedy o afinní bodové podprostory.



Obrázek 35: $U = I + \vec{z} \notin t$, $Q = P + \vec{x} \notin k$, $B = A + \vec{x} \notin \to bA$

Speciální afinní bodové podprostory

Následující pojmy se používají k označení afinních bodových podprostorů uvedených dimenzí, bez ohledu na dimenzi příslušného afinního bodového prostoru A_n.

– *přímka*, podprostor dimenze 1, značíme A_1,

– *rovina*, podprostor dimenze 2, značíme A_2,

– *nadrovina*, podprostor dimenze $n-1$, značíme A_{n-1}.

14.1 Parametrické vyjádření podprostoru

Již víme, že každý bod X *afinního bodového prostoru* A_n můžeme vyjádřit jako součet zvoleného pevného bodu A a touto volbou jednoznačně určeného vektoru $\vec{x}$, $X = A+\vec{x}$. Při dané bázi $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ vektorového zaměření V_n prostoru A_n potom můžeme dle (107) bod X vyjádřit rovnicí $X = P + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + ... + x_n\vec{b}_n$.

Stejný princip uplatníme při popisu *afinního bodového podprostoru* $A_k \subseteq\subseteq A_n$. Každý jeho bod $X \in A_k$ můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \vec{x}, \tag{110}$$

kde A je pevně zvolený bod z A_k a $\vec{x}$ je vektor z vektorového podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, který je zaměřením A_k. Afinní bodový podprostor A_k je tak určen svým zaměřením V_k a libovolným ze svých bodů A, zapisujeme

$$A_k = [A, V_k]\,. \tag{111}$$

Je-li $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ báze zaměření V_k, můžeme (110) psát ve tvaru

$$X = A + t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + ... + t_k\vec{b}_k;\ \ t_1, t_2, \ldots, t_k \in R, \tag{112}$$

kterému říkáme *parametrické vyjádření* (též *parametrická rovnice*) *afinního bodového podprostoru*[1] $A_k \subseteq\subseteq A_n$. S ohledem na skutečnost, že zaměření V_k je určeno svou bází, tj. $V_k = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}]$, můžeme afinní bodový podprostor kromě (111) zapsat také ve tvaru

$$A_k = \left[A; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\right]. \tag{113}$$

[1] Příslušné věty o určení afinního bodového prostoru a jeho parametrickém vyjádření spolu s jejich důkazy jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 16–18.

Parametrická vyjádření speciálních podprostorů

Podobu vztahů (111) a (113) pro konkrétní podprostory si můžeme ilustrovat na příkladech podprostorů, s kterými se budeme v následujících pasážích nejvíce setkávat:

- *přímka*, $A_1 = [A; \vec{u}]: \quad X = A + t\vec{u}$,
- *rovina*, $A_2 = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]: \quad X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$,
- *nadrovina*, $A_{n-1} = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n-1}] : X = A + \sum_{i=1}^{n-1} t_i\vec{u}_i$,
- *afinní prostor*, $A_n = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n] : X = A + \sum_{i=1}^{n} t_i\vec{u}_i$.

PŘÍKLAD 14.2. *Přímka $p = [A; \vec{u}]$ je dána bodem $A = [1, 2, 3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (-2, 5, 11)$. Napište parametrické vyjádření přímky p.*

Řešení: $X = [1, 2, 3] + t(-2, 5, 11);\ t \in R.$

Rozepsáním rovnice $X = [1, 2, 3] + t(-2, 5, 11)$, kde $X = [x_1, x_2, x_3]$, po složkách dostaneme *parametrické rovnice přímky*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2t, \\ x_2 &= 2 + 5t, \\ x_3 &= 3 + 11t;\ t \in R. \end{aligned} \tag{114}$$

14.2 Parametrické rovnice podprostoru

Rozepsáním *parametrické rovnice* (též *parametrického vyjádření*) rovnice podprostoru A_k pro jednotlivé souřadnice (vzhledem k určité soustavě souřadnic φ) dostaneme *parametrické rovnice podprostoru*. Počet těchto rovnic odpovídá dimenzi n afinního bodového prostoru A_n, počet parametrů v nich potom odpovídá dimenzi k podprostoru A_k (viz příklad 14.2, kde tři rovnice odpovídají dimenzi prostoru, v němž je úloha zadána, zatímco jeden parametr koresponduje s dimenzí uvažovaného podprostoru, tj. přímky).

Uvažujme pro ilustraci ještě rovinu ρ jako podprostor $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$ afinního bodového prostoru A_3. Její parametrická rovnice je

$$\rho: \ X = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}; \quad t_1, t_2 \in R.$$

Pro souřadnice $X = [x_1, x_2, x_3], A = [a_1, a_2, a_3], \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vzhledem k soustavě souřadnic φ ji přepíšeme do tvaru

$$\rho: \ [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + t_1(u_1, u_2, u_3) + t_2(v_1, v_2, v_3); \quad t_1, t_2 \in R,$$

z kterého po rozepsání pro jednotlivé souřadnice dostaneme soustavu *parametrických rovnic roviny*

$$
\begin{aligned}
\rho:\ x_1 &= a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 \\
x_2 &= a_2 + t_1u_2 + t_2v_2 \\
x_3 &= a_3 + t_1u_3 + t_2v_3; \quad t_1, t_2 \in R.
\end{aligned}
\tag{115}
$$

Stejně jako přímku a rovinu popíšeme parametrickými rovnicemi každý podprostor A_k afinního bodového prostoru A_n.

Věta 24 (Parametrické rovnice podprostoru)**.** *Nechť je v afinním prostoru A_n dána soustava souřadnic φ. Potom můžeme podprostor A_k; $A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]$, prostoru A_n určit parametrickými rovnicemi*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + u_{11}t_1 + u_{21}t_2 + ... + u_{k1}t_k \\
x_2 &= a_2 + u_{12}t_1 + u_{22}t_2 + ... + u_{k2}t_k \\
&\cdots\cdots \\
x_n &= a_n + u_{1n}t_1 + u_{2n}t_2 + ... + u_{kn}t_k
\end{aligned}
\tag{116}
$$

zkráceně

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij}t_i; \quad j = 1, 2, ..., n,$$

kde $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$, $i = 1, 2, ..., k$.

PŘÍKLAD 14.3. *Zjistěte, zda body $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, leží v rovině $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, kde $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$.*

PŘÍKLAD 14.4. *Určete dimenzi afinního bodového prostoru A_n a jeho podprostoru A_k daného rovnicí:*
a) $X = [4, -4, 2, 1, 1] + t\,(2, -8, 3, -5, 1)$,
b) $X = [1, 0, 2, 2] + r\,(1, -1, 0, 0) + s\,(1, 2, 0, -1)$.

PŘÍKLAD 14.5. *Zjistěte, jaké bodové podprostory jsou určené parametrickými rovnicemi*

$$
\begin{array}{llll}
a) & x_1 &=& r + s, \\
 & x_2 &=& 1 - s, \\
 & x_3 &=& -5 + 2r, \\
 & x_4 &=& 2 - r + 4s,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
a) & x_1 &=& 5 - r + s + t, \\
 & x_2 &=& r, \\
 & x_3 &=& s, \\
 & x_4 &=& 2 + 4s - t.
\end{array}
$$

14.3 Kanonický tvar rovnice přímky

Skutečnost, že parametrické rovnice přímky obsahují jenom jeden parametr, dovoluje modifikovat tuto soustavu rovnic do podoby, v níž je parametr vyloučen. Uvažujme přímku $p \in A_n$ danou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} p:\ \ x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3;\ t \in R. \end{aligned} \tag{117}$$

Potom platí

$$t = \frac{x - a_1}{u_1},\ t = \frac{y - a_2}{u_2},\ t = \frac{z - a_3}{u_3},$$

a přímku p tak můžeme zadat rovnicí ve tvaru

$$p:\ \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3},$$

kterému říkáme *kanonický tvar rovnice přímky.*

Poznámka. Pokud je $u_i = 0$, ponecháme pro příslušnou souřadnici x_i zvláštní rovnici. Například pro $p:\ x = 3, y = 1 - t, z = 4t;\ t \in R$ vypadá kanonický tvar rovnice přímky takto

$$p:\ x = 3,\ \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}.$$

PŘÍKLAD 14.6. *Napište parametrické vyjádření a kanonický tvar rovnice přímky, která je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$.*

a) $A = [3, 1, -4]\,,\ \vec{u} = (2, 7, 5)$,

b) $A = [2, 5, 1]\,,\ \vec{u} = (1, 2, 0)$.

14.4 Určení afinního podprostoru

Ze zkušenosti víme, že *přímka je určena dvěma různými body* a *rovina je určena třemi body, které neleží v přímce.* Otázkou je, kolik a jakých bodů potřebujeme k určení afinního bodového podprostoru dimenze k. Odpověď je skrytá ve vztahu (113). Potřebujeme tolik bodů podprostoru A_k, aby jimi bylo určeno k lineárně nezávislých vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ báze jeho vektorového zaměření V_k. Bodů tedy musí být $k + 1$ a musí být uspořádány tak, aby k jimi určených vektorů bylo nezávislých. Pro takovéto body zavedeme pojem *lineárně nezávislé body.*

Definice 28 (Lineárně nezávislé body)**.** *Body $A_0, A_1, A_2, ..., A_k$ z prostoru A_n nazýváme lineárně nezávislé (závislé), jsou-li jimi určené vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, ..., k$, lineárně nezávislé (závislé).*

Věta 25 (O určení afinního bodového podprostoru)**.** *Afinní bodový podprostor* A_k *prostoru* A_n *je jednoznačně určen* $k+1$ *lineárně nezávislými body, které mu náleží.*

Důkaz. Zápis $A_k = [A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_0, ..., A_k - A_0]$ je ekvivalentní vztahu (113)[1]. □

Důsledky věty 25

- přímka je určena dvěma nezávislými body
- rovina je určena třemi nezávislými body
- nadrovina je určena n nezávislými body

Poznámka. Body ležící na jedné společné přímce nazýváme **kolineární** body. Body ležící v jedné rovině pak **komplanární** body.

Získané poznatky o souvislosti lineárně nezávislých bodů a vektorů nám dovolují zapsat přímo parametrickou rovnici podprostoru A_k, který je dán $k+1$ lineárně nezávislými body, jak ukazuje následující příklad.

PŘÍKLAD 14.7. *Napište parametrickou rovnici roviny* $\rho = (A, B, C)$*, kde* $A = [1, 0, 1]$, $B = [3, 4, 2]$ *a* $C = [5, 1, 0]$.

Řešení: Parametrická rovnice dané roviny je

$$\rho: \; X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A); \; t_1, t_2 \in R.$$

Jednotlivé *parametrické rovnice* potom dostaneme rozepsáním po složkách

$$\begin{aligned} \rho: \; x &= a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2), \\ z &= a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3); \; t_1, t_2 \in R. \end{aligned}$$

Odtud po dosazení souřadnic dostaneme konkrétní parametrické rovnice dané roviny

$$\begin{aligned} \rho: \; x &= 1 + 2t_1 + 4t_2, \\ y &= 4t_1 + t_2, \\ z &= 1 + t_1 - t_2; \; t_1, t_2 \in R. \end{aligned}$$

Důsledky řešení příkladu 14.7

Z řešení příkladu 14.7 vyplývá, jak si můžeme urychlit zápis parametrických rovnic speciálních podprostorů, které jsou dány $k+1$ body:

[1] Více viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 26

- Přímka: $X = A + t(B - A);\ t \in R$
- Rovina: $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$
- Nadrovina: $X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + ... + t_{n-1}(A_{n-1} - A_0);\ t_1, t_2, ..., t_{n-1} \in R$

PŘÍKLAD 14.8. *V A_4 jsou dány body $K = [1, 0, 1, 2]$, $L = [4, 2, 3, 1]$, $M = [-1, 3, 0, 1]$, $N = [2, 1, 1, 5]$. Rozhodněte, zda určují podprostor $A_3 \subseteq\subseteq A_4$. Pokud ano, napište jeho parametrické vyjádření.*

PŘÍKLAD 14.9. *Rovina je určena body $A = [2, 1, 0]$, $B = [2, 4, 1]$ a směrem vektoru $\vec{u} = (1, 1, 3)$. Napište její parametrické rovnice.*