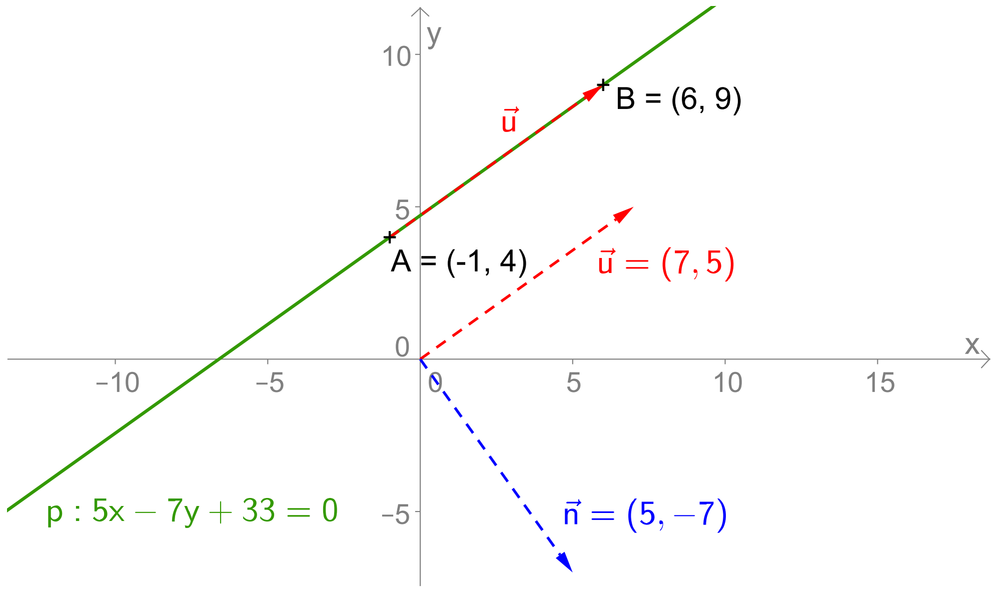
15 Obecná (neparametrická) rovnice nadroviny

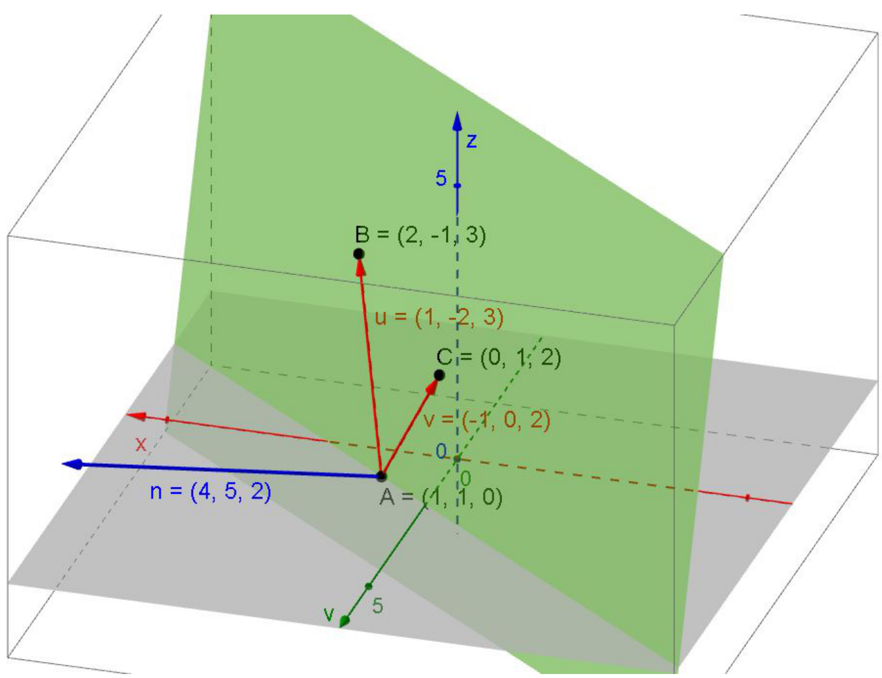
Nadrovinou v afinním bodovém prostoru A_n rozumíme jeho podprostor dimenze $n-1$. V afinním bodovém prostoru A_2 tak roli nadroviny hraje *přímka*, zatímco v afinním bodovém prostoru A_3 je nadrovinou *rovina*.

Ze středoškolské matematiky již víme, že přímku v A_2 a rovinu v A_3 lze popsat jednou algebraickou rovnicí, které říkáme *obecná rovnice*. Například přímka $p \subseteq\subsetneq$



Obrázek 36: Obecná rovnice přímky $p:\ 5x - 7y + 33 = 0$

A_2, která je dána body $A = [-1,4], B = [6,9]$, má obecnou rovnici $p:\ 5x-7y+33 = 0$, viz Obr. 36. Rovina $\rho \subseteq\subsetneq A_3$, určená body $A = [1,1,0], B = [2,-1,3], C = [0,1,2]$, má obecnou rovnici $\rho:\ 4x+5y+2z-9 = 0$, viz Obr. 37.



Obrázek 37: Obecná rovnice roviny $\rho:\ 4x + 5y + 2z - 9 = 0$

Skutečnost, že přímku v A_2 a rovinu v A_3 lze popsat jedinou rovnicí můžeme zobecnit na případ nadroviny v afinním bodovém prostoru A_n. Využijeme k tomu své zkušenosti získané řešením soustav lineárních rovnic.

Především víme, že množina všech řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

je *podprostor afinního bodového prostoru* A_n, jehož dimenze je $k = n - h$, kde $h = h(A) = h(A^*)$ (A je *matice soustavy*, A^* je *rozšířená matice soustavy*). Představme si, že máme „soustavu" jediné nehomogenní rovnice o n neznámých (přitom koeficient u alespoň jedné z nich je různý od nuly). Potom bodový prostor jejího řešení má dimenzi $k = n - 1$, protože pro takovouto rovnici je určitě $h = h(A) = h(A^*) = 1$. Každou lineární algebraickou rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0, \tag{121}$$

kde $a_i \neq 0$ pro aspoň jedno $i = 1, 2, \ldots n$, je tak určena *nadrovina* v prostoru A_n.

Naopak, každý afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subsetneq A_n$ lze dle věty 24 na str. 102 popsat soustavou n parametrických rovnic (119) s k parametry. V případě nadroviny se tedy jedná o n parametrických rovnic s $n - 1$ parametry. Pokud z jedné z n parametrických rovnic vyjádříme parametr, řekněme třeba t_1, a získaným výrazem ho nahradíme ve zbývajících rovnicích, přijdeme sice o jednu rovnici, ale také se o jeden zmenší počet parametrů. Říkáme, že jsme parametr t_1 eliminovali. Pokud se rozhodneme takto eliminovat všechny zbývající parametry, je zřejmé, že na konci procesu eliminace nám zůstane jediná rovnice ve tvaru (121), bez parametru, pouze s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Tak jsme ukázali, že každé nadrovině A_{n-1} afinního bodového prostoru A_n je jednoznačně přiřazena rovnice ve tvaru (121), kterou nazýváme *obecnou* (též *neparametrickou*) *rovnicí nadroviny.*

V následujících pasážích této kapitoly se budeme věnovat metodám výpočtu obecné rovnice přímky v afinním bodovém prostoru A_2 a roviny v prostoru A_3. V závěru pak získané poznatky využijeme k zobecnění do prostoru A_n.

15.1 Obecná rovnice přímky v A_2

Na konkrétním příkladu si ukážeme následující čtyři metody výpočtu obecné rovnice přímky v A_2:

i. **Eliminace parametru z parametrických rovnic přímky.**
Z jedné z rovnic

$$p: \ x = a_1 + tu_1,$$
$$y = a_2 + tu_2; \ t \in R$$

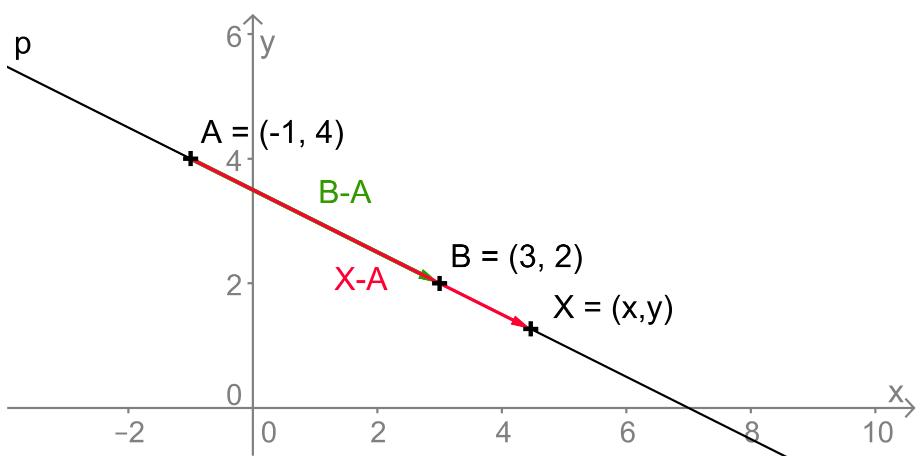
vyjádříme t a dosadíme do té zbývající. Dostaneme rovnici

$$u_2x - u_1y - u_2a_1 + u_1a_2 = 0, \tag{122}$$

která je obecnou rovnicí přímky p (je ve tvaru rovnice $ax + by + c = 0$, kde $a = u_2, b = -u_1, c = -u_2a_1 + u_1a_2$). Všimněte si, že koeficienty u x a y jsou souřadnice $(u_2, -u_1)$ vektoru, který je kolmý ke směrovému vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ přímky p, říkáme mu *normálový vektor*, značíme ho $\vec{n}$ (směrový a normálový vektor přímky viz Obr. 36).

ii. **Dosazení souřadnic daných bodů do obecné rovnice.**
Je-li přímka p dána dvěma svými body $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$, dosadíme jejich souřadnice do obecné rovnice $ax + by + c = 0$ a vypočítáme koeficienty a, b, c (ty jsou ovšem určeny až na násobek nenulovým reálným číslem, protože rovnice $ax+by+c = 0$ a $kax+kby+kc = 0$, kde $k \in R - \{0\}$, popisují stejnou přímku).

iii. **Využití lineární závislosti vektorů nebo nulového obsahu jimi určeného rovnoběžníku.**
Z Obr. 38 je patrné, že právě jenom pro body X přímky p, která je určená dvěma body A, B, platí, že vektory $B - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé. Potom



Obrázek 38: Obecná rovnice přímky; vektory $B - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé

ale matice, jejímiž řádky jsou tyto vektory, je singulární, tj. její determinant je roven nule

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{123}$$

Úpravou (123) dostaneme obecnou rovnici přímky p ve tvaru

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 = 0. \tag{124}$$

Ke stejnému výsledku se dostaneme úvahou založenou na vztahu pro výpočet obsahu rovnoběžníku určeného dvěma vektory (viz (105) na str. 89). Je zřejmé, že rovnoběžník určený vektory $B - A$ a $X - A$ má obsah

$$S_\diamond = \left\| \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} \right\|$$

rovný 0 právě tehdy, když bod X leží na přímce p určené body A, B. Tak se opět dostáváme ke vztahu (123).

iv. **Využití normálového vektoru.**
Ze vztahů (122) a (124) je patrné, že koeficienty a, b v obecné rovnici přímky $p:\ ax + by + c = 0$ jsou souřadnicemi vektoru kolmého ke směru přímky p, tj. *normálového vektoru* této přímky. Souřadnice normálového vektoru přímky snadno získáme ze souřadnic jejího směrového vektoru uplatněním požadavku kolmosti těchto dvou vektorů, tj. požadavku splnění rovnosti $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, (prohozením a změnou znaménka u jedné z nich, vztah mezi směrovým a normálovým vektorem přímky viz Obr. 36). Takto získané koeficienty a, b dosadíme spolu se souřadnicemi x, y jednoho z daných bodů přímky do rovnice $ax + by + c = 0$ a dopočítáme hodnotu c.

PŘÍKLAD 15.1. *Určete obecnou rovnici přímky* $p = [A, B]$; $A = [-5, 3]$, $B = [2, 4]$.

Řešení:
<u>*ad i.*</u> Vypočítáme směrový vektor přímky $\vec{u} = B - A = (7, 1)$, napíšeme její parametrické rovnice

$$\begin{aligned} p:\ x &= -5 + 7t \\ y &= 3 + t;\ t \in R \end{aligned}$$

a eliminací (vyloučením) parametru t získáme její obecnou (neparametrickou) rovnici

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

<u>*ad ii.*</u> Do rovnice $ax+by+c = 0$ dosadíme souřadnice bodů A, B a řešíme příslušnou soustavu rovnice

$$\begin{aligned} -5a + 3b + c &= 0, \\ 2a + 4b + c &= 0 \end{aligned}$$

s neznámými a, b, c. Vyjde nám $a = \frac{1}{26}c, b = -\frac{7}{26}c$, kde $c \in R$. Protože nám jde o jedno konkrétní řešení, které bude vypadat „hezky“, volíme $c = 26$ a dostáváme sadu koeficientů $a = 1, b = -7, c = 26$ pro obecnou rovnici dané přímky

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

ad iii. Do vztahu (123) dosadíme souřadnice bodů A, B

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-3 \\ 2-(-5) & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+5 & y-3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a spočítáme determinant na levé straně. Dostaneme obecnou rovnici dané přímky

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

ad iv. Vypočítáme směrový vektor přímky $\vec{u} = B - A = (7, 1)$ a určíme souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (n_1, n_2)$ tak, aby byla splněna podmínka kolmosti

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (7, 1) \cdot (n_1, n_2) = 7n_1 + 1n_2 = 0.$$

Nejjednodušší je zvolit $\vec{n} = (n_1, n_2) = (u_2, -u_1) = (1, -7)$. Nyní známe podobu prvních dvou členů obecné rovnice přímky $p:\ x - 7y + c = 0$. Když do ní dosadíme souřadnic bodu $A = [-5, 3]$ (stejně tak můžeme dosadit souřadnice B), dostaneme rovnici $-5 - 7 \cdot 3 + c = -26 + c = 0$, ze které vypočítáme $c = 26$. Opět dostaneme obecnou rovnici dané přímky ve tvaru

$$p:\ x - 7y + 26 = 0.$$

15.2 Obecná rovnice roviny v A_3

Pro výpočet obecné rovnice roviny v A_3 si popíšeme čtyři metody, které jsou analogické s výše uvedenými metodami výpočtu obecné rovnice přímky v A_2:

i. **Eliminace parametru z parametrických rovnic přímky.**
Z jedné z rovnic

$$\begin{aligned} \rho:\ x &= a_1 + su_1 + tv_1, \\ y &= a_2 + su_2 + tv_2, \\ z &= a_3 + su_3 + tv_3,;\ s, t \in R \end{aligned}$$

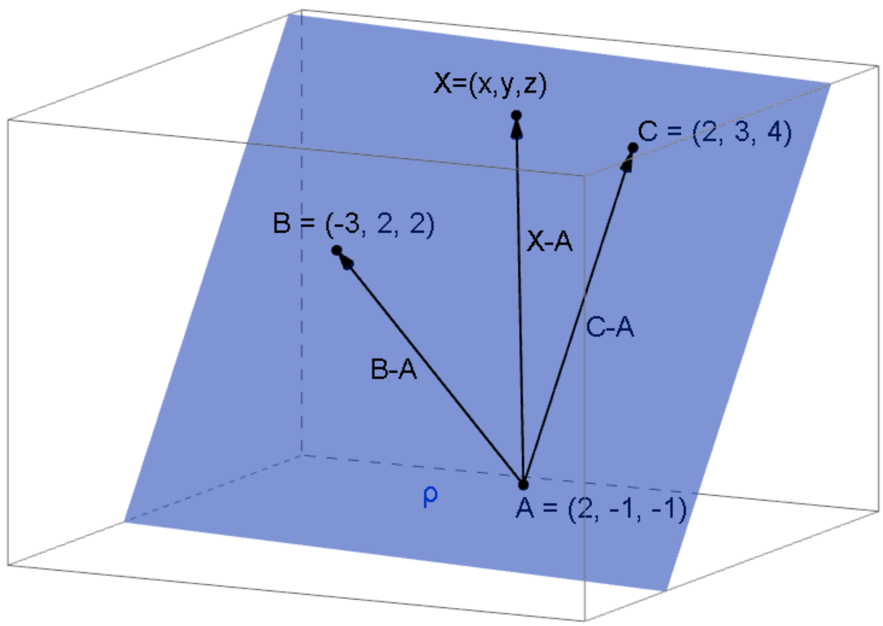
vyjádříme t a dosadíme do těch zbývajících. To samé potom provedeme s parametrem s. Dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{125}$$

kde (po případném vydělení celé rovnice společným dělitelem jejích koeficientů) $a = u_2v_3 - u_3v_2$, $b = u_3v_1 - u_1v_3$, $c = u_1v_2 - u_2v_1$, $d = -(u_2v_3 - u_3v_2)a_1 - (u_3v_1 - u_1v_3)a_2 - (u_1v_2 - u_2v_1)a_3$. Jedná se o obecnou rovnici roviny ρ. Všimněte si, že koeficienty u x, y a z jsou souřadnicemi vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, tj. vektoru, který je kolmý k rovině ρ (přesněji k vektorům zaměření roviny ρ.) Říkáme mu *normálový vektor* roviny a značíme ho $\vec{n}$ (normálový vektor roviny viz Obr. 37).

ii. **Dosazení souřadnic daných bodů do obecné rovnice.**
Je-li rovina ρ dána třemi svými (lineárně nezávislými) body $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3], C = [c_1, c_2, c_3]$, dosadíme jejich souřadnice do obecné rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a vypočítáme koeficienty a, b, c, d (ty jsou ovšem určeny až na násobek nenulovým reálným číslem, protože rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a $kax + kby + kcz + kd = 0$, kde $k \in R - \{0\}$, popisují stejnou rovinu).

iii. **Využití lineární závislosti vektorů nebo nulového objemu jimi určeného rovnoběžnostěnu.**
Z Obr. 39 je patrné, že právě jenom pro body X roviny ρ, která je určena třemi lineárně nezávislými body A, B, C, platí, že vektory $B - A, C - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé. Potom ale matice, jejímiž řádky jsou tyto vektory, je singulární,



Obrázek 39: Obecná rovnice roviny; vektory $B - A, C - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé

tj. její determinant je roven nule,

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (126)$$

Úpravou (126) dostaneme obecnou rovnici roviny ρ ve tvaru (125), se stejným významem koeficientů a, b, c, d, pokud $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$.

Ke stejnému výsledku se dostaneme úvahou založenou na vztahu pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory (viz (106) na str. 89). Je zřejmé, že rovnoběžnostěn určený vektory $B - A,\ C - A$ a $X - A$ má objem

$$V = \left\| \begin{matrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{matrix} \right\|$$

rovný 0 právě tehdy, když bod X leží v rovině ρ určené body A, B, C. Tak se opět dostáváme ke vztahu (126).

iv. **Využití normálového vektoru.**
Ze vztahů (125) a (126) je patrné, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho:\ ax+by+cz+d=0$ jsou souřadnicemi vektoru kolmého k rovině (přesněji k vektorům jejího zaměření), tj. *normálového vektoru* této roviny. Dokonce jde, po vydělení případným společným dělitelem, o souřadnice vektorového součinu $\vec{u}\times\vec{v}$, kde $\vec{u}=B-A$ a $\vec{v}=C-A$ jsou vektory generující vektorové zaměření roviny. Souřadnice normálového vektoru roviny tak snadno získáme výpočtem tohoto vektorového součinu (vztah mezi $\vec{u}=B-A$ a $\vec{v}=C-A$ a normálovým vektorem $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ roviny viz Obr. 37). Takto získané koeficienty a, b, c dosadíme spolu se souřadnicemi x, y, z jednoho z daných bodů roviny do rovnice $ax+by+cz+d=0$ a dopočítáme hodnotu d.

PŘÍKLAD 15.2. *Určete neparametrickou (obecnou) rovnici roviny určené body* $A=[1,0,3]$, $B=[2,4,-1]$, $C=[0,3,8]$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 32x-y+7z-53=0$$

PŘÍKLAD 15.3. *Napište obecnou rovnici roviny určené bodem* $A=[2,1,-2]$ *a směry vektorů* $\vec{u}=(3,2,4)$, $\vec{v}=(3,5,2)$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16x+6y+9z+44=0$$

PŘÍKLAD 15.4. *Napište obecnou rovnici roviny určené třemi body* $A=[1,1,-1]$, $B=[3,2,0]$, $C=[4,4,-3]$.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1)  A:[1,1,-1]$ B:[3,2,0]$ C:[4,4,-3]$ X:[x,y,z]$

(%i5)  M:matrix(X-A,B-A,C-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

```
(%i6) expand(determinant(M))=0;
```

(%o6) $3\,z+7\,y-5\,x+1=0$

PŘÍKLAD 15.5. *Určete parametrické rovnice roviny*

$$\rho:\ 2x-y+3z-1=0.$$

Řešení: Řešíme jako „soustavu“ jedné rovnice o třech neznámých. Dvě z nich nahradíme reálnými parametry, jako vhodné se jeví x a z, a zbývající neznámou, tj. y, z rovnice vyjádříme. Dostaneme parametrické rovnice

$$\begin{aligned}\rho:\ x&=r,\\ y&=-1+2r+3s,\\ z&=s;\ r,s\in R.\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r:2*x-y+3*z-1=0;
```

(%o1) $3\,z-y+2\,x-1=0$

```
(%i2) solve(r,[y,z,x]);
```

(%o2) $[[y=3\,\%r2+2\,\%r1-1, z=\%r2, x=\%r1]]$

15.3 Obecná rovnice nadroviny v A_n

Vztahy (123) a (126), v nichž je k zápisu obecné (neparametrické) rovnice přímky v A_2 a roviny v A_3 použit determinant, nám dovolují pojem obecné (též neparametrické) rovnice zobecnit na nadrovinu v afinním bodovém prostoru A_n. Protože nám v prostorech vyšší dimenze již nevystačí geometrická představa, odvodíme vztah lineární závislosti příslušných vektorů rovnou z definice tohoto pojmu, jak ukazuje následující příklad (který je situován do prostoru dimenze 3).

Uvažujme nadrovinu prostoru A_3 (tj. rovinu), která je určena třemi nezávislými body A, B, C; $A=[a_1,a_2,a_3]$, $B=[b_1,b_2,b_3]$, $C=[c_1,c_2,c_3]$. Vyjádříme ji vektorově parametrickou rovnicí

$$X=A+t_1(B-A)+t_2(C-A).$$

Po jejím přepsání do tvaru

$$t_0(X-A)+t_1(B-A)+t_2(C-A)=\vec{o},$$

kde $t_0=1\neq 0$, je zřejmé, že vektory $X-A$, $B-A$ a $C-A$ jsou **lineárně závislé**. Z toho plyne tvrzení následující věty.

Věta 26 (Obecná rovnice nadroviny I). *Jestliže je nadrovina A_{n-1} určena n lineárně nezávislými body A_0, $A_1, ..., A_{n-1}$, které mají v afinním bodovém prostoru A_n souřadnice $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, je pro každý bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ této nadroviny splněna rovnice*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{127}$$

kterou nazýváme **obecná (neparametrická) rovnice nadroviny**.

Důkaz. Myšlenka důkazu je ilustrována příkladem nadroviny v A_3, který je uveden před větou. Jediné, co je třeba ještě dokázat je, že rovnice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{01} & x_2 - a_{02} & \dots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} - a_{01} & a_{n-1,2} - a_{02} & \dots & a_{n-1,n} - a_{0n} \end{vmatrix} = 0.$$

S touto ekvivalencí jsme se však již setkali (viz str. 89) a víme, že se snadno dokáže užitím věty o rozvoji determinantu. □

I v prostoru A_n platí, že po výpočtu determinantu dostaneme obecnou rovnici v algebraickém tvaru, jak uvádí následující věta.

Věta 27 (Obecná rovnice nadroviny II). *Každý bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ nadroviny A_{n-1} ainního bodového prostoru A_n splňuje svými souřadnicemi obecnou (neparametrickou) rovnici*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 = 0, \tag{128}$$

kterou můžeme zkráceně zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} c_ix_i + c_0 = 0, \tag{129}$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n, c_0$ jsou po řadě algebraické doplňky prvků $x_1, x_2, ..., x_n, 1$ prvního řádku determinantu (127) z věty 26.

Důsledky vět 26, 27

- Každá rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ je rovnicí nadroviny A_{n-1}, pokud je alespoň jedno $c_i \neq 0$.

- V prostoru A_2 je nadrovinou **přímka**. Nechť $p = \leftrightarrow AB$; $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom

$$p: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + c = 0.$$

- V prostoru A_3 je nadrovinou **rovina**. Nechť $\rho = (ABC)$; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom

$$\rho: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + cz + d = 0.$$

Obecná rovnice nadroviny A_{n-1} je určena až na nenulový násobek. Je-li $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ rovnicí nadroviny, pak také rovnice $k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0\right) = 0$ je obecnou rovnicí této nadroviny ve stejné soustavě souřadnic, jestliže $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo.