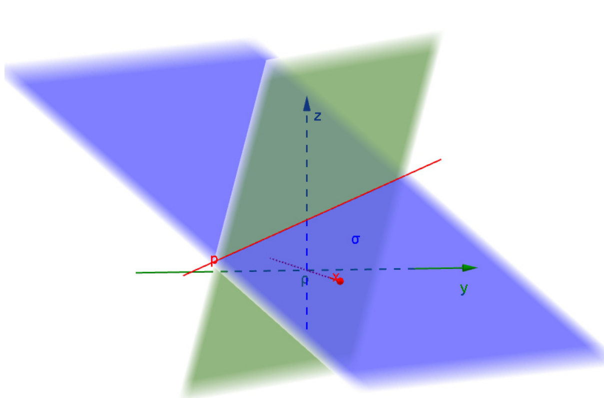
16 Svazky a trsy nadrovin

16.1 Svazky rovin v A_3

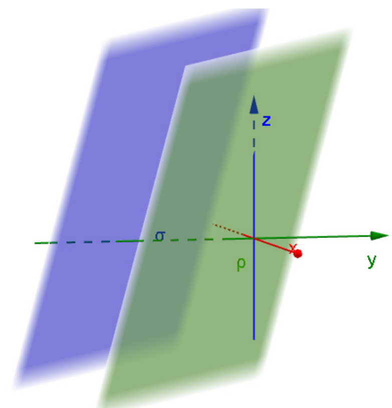
PŘÍKLAD 16.1. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ, σ :*

a) $\rho: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \ \sigma: \ x + y + 2z - 3 = 0,$

b) $\rho: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \ \sigma: \ 4x + 6y - 2z + 5 = 0,$



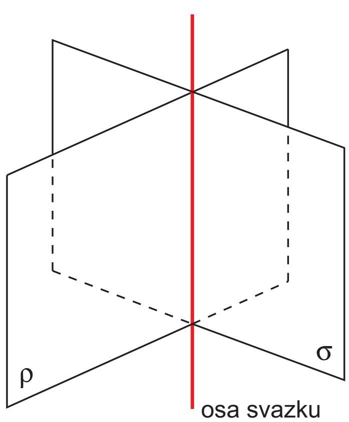
a) Svazek rovin 1. druhu



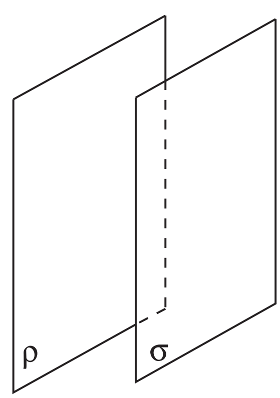
b) Svazek rovin 2. druhu

Obrázek 40: Svazky rovin v A_3

Definice 29 (Svazek rovin)**.** *Množinu všech rovin z A_3, jejichž průnikem je přímka (tj. afinní bodový podprostor dimenze 1) nazveme* **svazkem rovin prvého druhu**. *Množinu všech navzájem rovnoběžných rovin nazveme* **svazkem rovin druhého druhu (osnovou rovin)**.



Svazek rovin 1. druhu



Svazek rovin 2. druhu
(osnova rovin)

Je zřejmé, že *svazek rovin* je určen dvojicí rovin (viz Obr. 40). Otázkou je, jak vypadají rovnice dalších rovin náležejících těmto svazkům. Jak souvisejí s rovnicemi daných „určujících“ rovin

$$\rho: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \ \sigma: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0?$$

Řešením je rovnice ve tvaru lineární kombinace obecných rovnic rovin „určujících“ svazek

$$\tau:\ \lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

V případě rovin uvedených v příkladu 16.1 a zobrazených na Obr. 40 se jedná o svazky s těmito rovnicemi:

ad a) Svazek prvního druhu určený rovinami $\rho:\ 2x+3y-z+1=0$, $\sigma:\ x+y+2z-3=0:$

$$\lambda_1(2x+3y-z+1)+\lambda_2(x+y+2z-3)=0.$$

ad b) Svazek druhého druhu určený rovinami $\rho:\ 2x+3y-z+1=0$, $\sigma:\ 4x+6y-2z+5=0:$

$$\lambda_1(2x+3y-z+1)+\lambda_2(4x+6y-2z+5)=0.$$

Podle typu svazku se liší požadavky na hodnoty koeficientů λ_1, λ_2. Pro svazek rovin 1. druhu stačí požadovat, aby aspoň jeden z těchto koeficientů byl různý od nuly (tj. nesmí být oba zároveň rovny nule). V případě svazku 2. druhu požadujeme, aby tyto koeficienty nebyly řešením soustavy $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2=\lambda_1b_1+\lambda_2b_2=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2=\lambda_1d_1+\lambda_2d_2=0$.

Věta 28 (Rovnice svazku rovin 1. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1=a_1x+a_2y+a_3z+a_0=0,\quad L_2=b_1x+b_2y+b_3z+b_0=0$$

rovnice různoběžných rovin v A_3 v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1L_1+\lambda_2L_2=0$$

je rovnicí svazku rovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Věta 29 (Rovnice svazku rovin 2. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1=a_1x+a_2y+a_3z+a_0=0,\quad L_2=b_1x+b_2y+b_3z+b_0=0$$

rovnice rovnoběžných rovin v A_3 v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1L_1+\lambda_2L_2=0$$

je rovnicí svazku rovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1a_i+\lambda_2b_i=0;\ i=1,2,3.$

PŘÍKLAD 16.2. *Rovina je určena bodem* $M = [2, -1, 3]$ *a průsečnicí rovin o rovnicích* $6x + 2y - z - 3 = 0$, $3x + 4y - 2z - 2 = 0$. *Napište její rovnici.*

PŘÍKLAD 16.3 (Svazek tří nadrovin)**.** *Rozhodněte, zda roviny* L_1, L_2, L_3 *náleží témuž svazku:*

a) $L_1: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \quad L_2: \ x + y + 2z - 3 = 0, \quad L_3: \ x - 2y + z + 5 = 0.$

b) $L_1: \ x - 2y + 5z - 1 = 0, \quad L_2: \ -3x + 6y - 15z + 5 = 0, \quad L_3: \ 2x - 4y + 10z + 9 = 0.$

Poznámka. Uvažujme matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = H, \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh svazku**, který tvoří uvažované roviny:

i) jestliže $H = h = 2$, potom se jedná o **svazek rovin prvého druhu**,

ii) jestliže $H = 2, \ h = 1$, potom se jedná o **svazek rovin druhého druhu**.

16.2 Svazky přímek v A_2

Analogicky svazkům rovin uvažujeme i *svazky přímek*. Svazku přímek prvního druhu (zkráceně hovoříme o svazku přímek) odpovídá množina všech přímek, které mají společný jeden bod (tzv. střed svazku). Svazku přímek druhého druhu (zkráceně hovoříme o osnově přímek) pak odpovídá množina všech navzájem rovnoběžných přímek.

PŘÍKLAD 16.4. *Rozhodněte, zda přímky* a, b, c *patří do téhož svazku:*

$$a: \ 2x + y + 2 = 0, \quad b: \ 5x - 3y + 27 = 0, \quad c: \ x - 6y + 27 = 0.$$

Poznámka. K řešení příkladu 16.4 můžeme využít i determinant matice M_1.

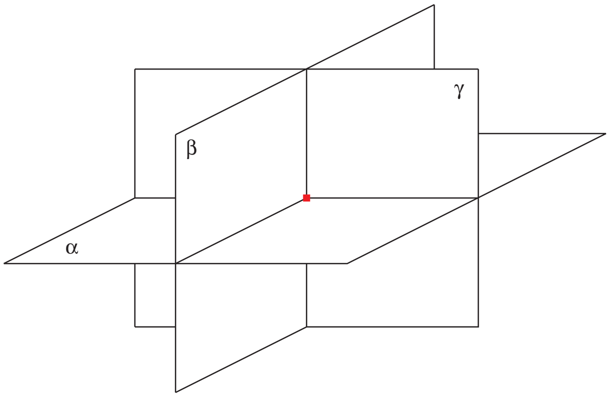
PŘÍKLAD 16.5. *Svazek přímek je určen přímkami* $a: \ x + 2y - 5 = 0$, $b: \ 3x - 2y + 1 = 0$. *Určete rovnici přímky svazku, která*

a) prochází bodem $A = [2, -1]$,

b) je rovnoběžná s přímkou $p: \ y - 1 = 0$.

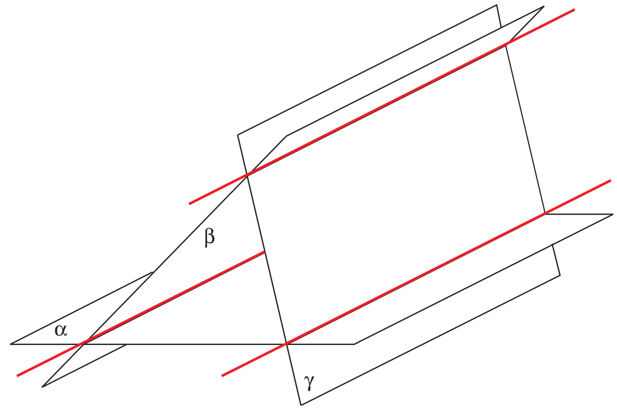
16.3 Trs rovin

K definici trsu rovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří roviny, které nenáleží témuž svazku?“



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$$

Trs rovin 1. druhu



$$V^{\alpha} \cap V^{\beta} \cap V^{\gamma} = V_{n-2}$$

Trs rovin 2. druhu

Věta 30 (Vzájemná poloha tří rovin)**.** *Tři roviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_3, které nenáleží témuž svazku rovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bod (tj. bodový podprostor A_0),
2) průnik rovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_1 (tj. směr).

Definice 30 (Trs rovin)**.** *Množinu všech rovin v A_3, jejichž průnikem je bod, nazýváme* **trs rovin prvého druhu**. *Množinu všech rovin, jejichž zaměření obsahují společný podprostor V_1 (tj. směr) prostoru V_3, nazveme* **trs rovin druhého druhu**.

Poznámka. V každém trsu 1. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 1. druhu a v každém trsu rovin 2. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 2. druhu i nekonečně mnoho svazků 1. druhu.

Poznámka. Analogicky rovinám v A_3 můžeme uvažovat i o *trsech přímek* v prostoru A_2. Ukáže se, že trs přímek prvého v A_2 neexistuje. Trs přímek druhého druhu je pak tvořen všemi přímkami v rovině. Proč to tak je, bude zřejmé z definice trsu nadrovin v A_n.

Opět nás zajímá, jak se dá vyjádřit rovnice libovolné roviny náležející danému trsu pomocí rovnic jeho „určujících rovin“.

Věta 31 (Rovnice trsu 1. druhu)**.** *Nechť průnikem rovin L_1, L_2, L_3 je bod. Potom rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu rovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Věta 32 (Rovnice trsu 2. druhu)**.** *Nechť průnik rovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnikem jejich zaměření je vektorový prostor dimenze 1. Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu rovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, 3$.

16.4 Svazek nadrovin

Definice 31 (Svazek nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin z A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n-2$, nazveme* **svazkem nadrovin prvého druhu***. Množinu všech navzájem rovnoběžných nadrovin nazveme* **svazkem nadrovin druhého druhu (osnovou nadrovin)***.*

Věta 33 (Rovnice svazku nadrovin 1. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

rovnice různoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Věta 34 (Rovnice svazku nadrovin 2. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

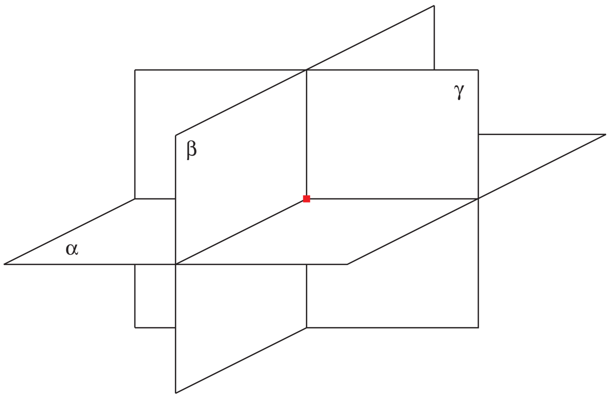
rovnice rovnoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = 0$; $i = 1, 2, ..., n$.

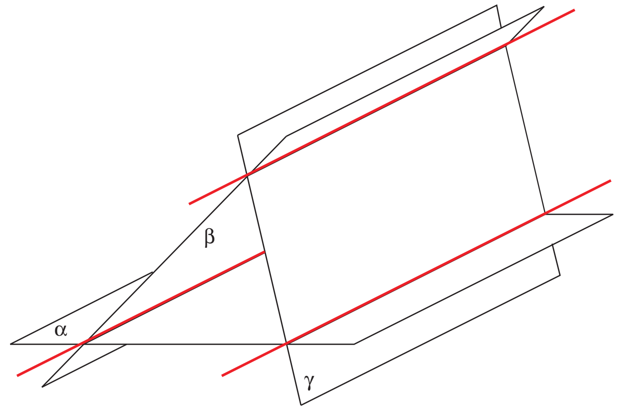
16.5 Trs nadrovin

K definici trsu nadrovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří nadroviny, které nenáleží témuž svazku?“



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$

Trs (nad)rovin 1. druhu



$V^{\alpha} \cap V^{\beta} \cap V^{\gamma} = V_{n-2}$

Trs (nad)rovin 2. druhu

Věta 35 (Vzájemná poloha tří nadrovin)**.** *Tři nadroviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_n, které nenáleží témuž svazku nadrovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bodový podprostor A_{n-3},
2) průnik nadrovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_{n-2}.

Definice 32 (Trs nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin v A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n-3$, nazýváme* **trs nadrovin prvého druhu***. Množinu všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje podprostor V_{n-2} prostoru A_n, nazveme* **trs nadrovin druhého druhu***.*

PŘÍKLAD 16.6 (Průnik tří nadrovin)**.** *Vymyslete, jak z hodností matic M_1, M_2 příslušejících třem nadrovinám L_1, L_2, L_3 poznáme, zda tyto nadroviny náležejí nějakému svazku nebo zda tvoří trs, a potom jaký?*

16.5.1 Rovnice trsu nadrovin

Věta 36 (Rovnice trsu 1. druhu)**.** *Nechť průnikem nadrovin L_1, L_2, L_3 je bodový podprostor dimenze $n-3$. Pak rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Věta 37 (Rovnice trsu 2. druhu)**.** *Nechť průnik nadrovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnik jejich zaměření je vektorový prostor dimenze $n-2$. Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, ..., n$.

PŘÍKLAD 16.7 (Trs čtyř nadrovin)**.** *Vyslovte kritérium pro určení, zda čtyři nadroviny L_1, L_2, L_3, L_4 náleží témuž trsu nadrovin.*

Poznámka. Uvažujme opět matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = h', \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh trsu**, který tvoří uvažované nadroviny:

i) jestliže $h' = h = 3$, potom nadroviny vytváří **trs prvého druhu**,

ii) jestliže $h' = 3,\ h = 2$, potom nadroviny tvoří **trs druhého druhu**.