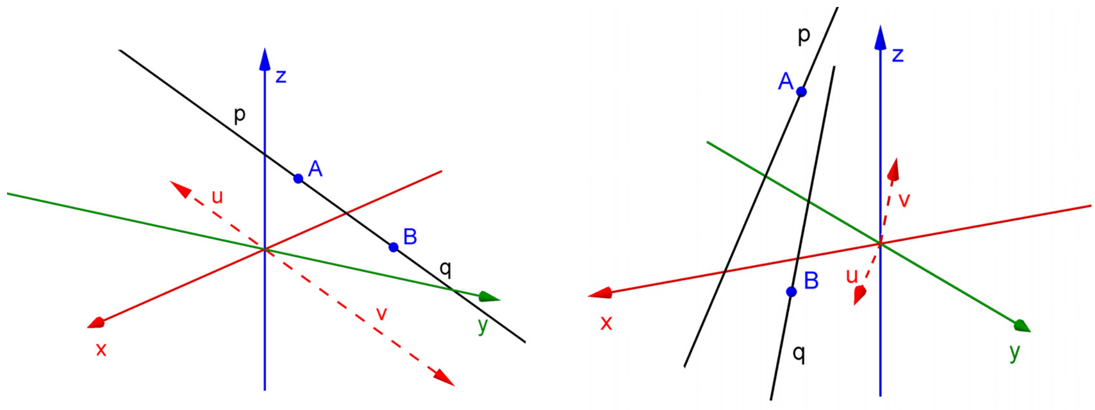
17 Vzájemná poloha afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 17.1. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímek* $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$:

a) $A = [1, 2, 3]$, $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $B = [0, 5, 1]$, $\vec{v} = (-2, 6, -4)$.

b) $A = [1, -3, 4]$, $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $B = [3, 0, -1]$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$.



a) p, q jsou totožné b) p, q jsou mimoběžné

Obrázek 41: Vzájemná poloha přímek $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$

ad a)

```
(%i1)  A:matrix([1],[2],[3])$ u:matrix([1],[-3],[2])$
       B:matrix([0],[5],[1])$ v:matrix([-2],[6],[-4])$

(%i5)  M:addcol(u,-v,B-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

```
(%i6)  triangularize(M);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Přímky p, q jsou totožné.

ad b)

```
(%i1)  A:matrix([1],[-3],[4])$ u:matrix([2],[2],[-1])$
       B:matrix([3],[0],[-1])$ v:matrix([0],[1],[3])$

(%i5)  M:addcol(u,-v,B-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

```
(%i6)  triangularize(M);
```

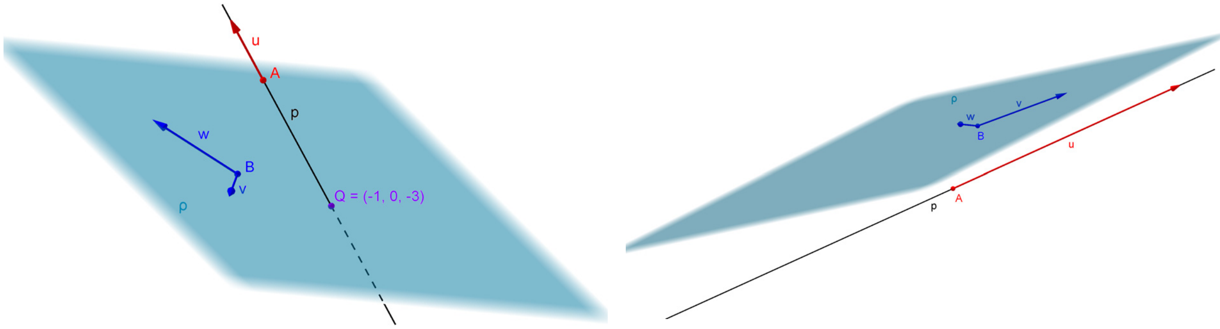
(%o6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

Přímky p, q jsou mimoběžné.

PŘÍKLAD 17.2. *Určete vzájemnou polohu přímky $p = [A; \vec{u}]$ a roviny $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$:*

a) $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

b) $A = [1, 0, 0]$, $\vec{u} = (7, 7, 1)$, $B = [0, 1, 3]$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$, $\vec{w} = (2, -1, -1)$.



a) p, ρ jsou různoběžné   b) p, ρ jsou rovnoběžné

Obrázek 42: Vzájemná poloha přímky $p = [A; \vec{u}]$ a roviny $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$

ad a)

```
(%i1) A:matrix([1],[2],[1])$ u:matrix([1],[1],[2])$
      B:matrix([2],[1],[-2])$ v:matrix([0],[2],[-1])$
      w:matrix([3],[-1],[2])$

(%i6) M:addcol(u,-v,-w,B-A);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

```
(%i7) triangularize(M);
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix}$

Přímka p a rovina ρ jsou různoběžné se společným bodem $Q = [-1, 0, -3]$.

ad b)

```
(%i1) A:matrix([1],[0],[0])$ u:matrix([7],[7],[1])$
      B:matrix([0],[1],[3])$ v:matrix([1],[3],[1])$
      w:matrix([2],[-1],[-1])$

(%i6) M:addcol(u,-v,-w,B-A);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -1 \\ 7 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

```
(%i7) triangularize(M);
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & 21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix}$

Přímka p a rovina ρ jsou rovnoběžné.

Definice 33 (Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů)**.** *Dva afinní bodové podprostory* $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [A; V_k]$ *afinního bodového prostoru* A_n *se nazývají:*

a) **rovnoběžné**, *jestliže* $V_h \subseteq\subseteq V_k$ *nebo* $V_k \subseteq\subseteq V_h$, *značíme* $A_h || A_k$,

b) **incidentní**, *jestliže* $A_h \subseteq\subseteq A_k$ *nebo* $A_k \subseteq\subseteq A_h$,

c) **různoběžné**, *jestliže* $A_h \cap A_k \neq \emptyset$ *a zároveň* A_h, A_k **nejsou incidentní**,

d) **mimoběžné**, *jestliže* A_h, A_k **nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné**.

17.1 Rovnoběžné afinní bodové podprostory

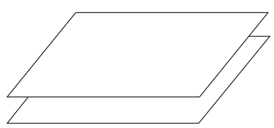
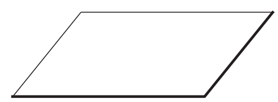
Rovnoběžné afinní bodové podprostory A_h, A_k značíme

$$A_h \| A_k.$$

Dva afinní bodové podprostory jsou rovnoběžné, jestliže zaměření jednoho z nich je součástí (podprostorem) zaměření druhého z nich. Například dvě rovnoběžné přímky mají společný směrový vektor, dvě rovnoběžné roviny mají společné zaměření a nebo směrový vektor přímky rovnoběžné s rovinou patří do zaměření této roviny.

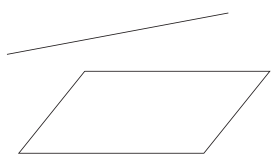
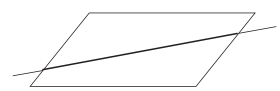
U rovnoběžných podprostorů $A_h || A_k$ rozlišujeme, zda je jejich průnik prázdná či neprázdná množina:

1) $h = k$

$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h = A_k$: 

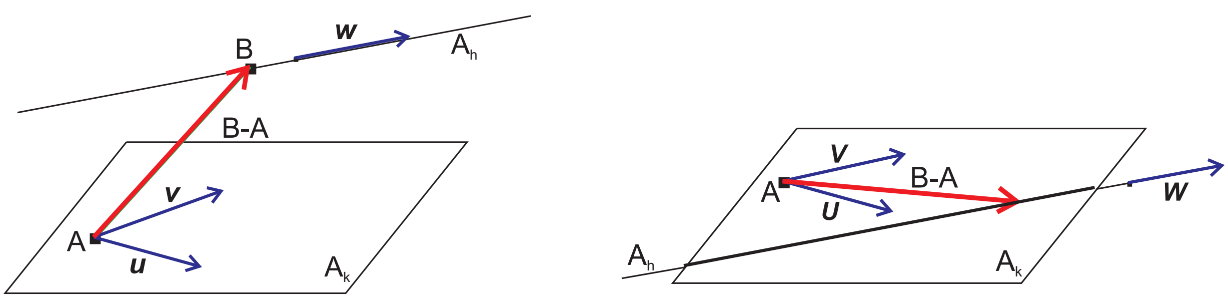
TOTOŽNÉ

2) $h < k$

$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h \subseteq\subseteq A_k$: 

INCIDENTNÍ

Naším cílem je formulovat obecný postup (algoritmus) určení rovnoběžných podprostorů (viz věta 38). Při identifikaci toho, zda mají dva rovnoběžné podprostory



$B - A \notin V_k$ $\qquad$ $B - A \in V_k$

Obrázek 43: $A_h \| A_k$ jsou **incidentní** $\Leftrightarrow$ $B - A \in V_k$

$A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ prázdný či neprázdný průnik, tj. při rozlišení mezi nein-cidentními a incidentními rovnoběžnými podprostory, hraje významnou roli vektor $B - A$. Z Obr. 43 je patrné, že dva rovnoběžné podprostory $A_h \| A_k$, kde $h < k$, jsou *incidentní* právě tehdy, když $B - A \in V_k$.

Poznámka. Mají-li incidentní podprostory stejnou dimenzi, nazýváme je **totožné** nebo **splývající** podprostory.

Věta 38 (Rovnoběžnost a incidence)**.** *Dva afinní bodové podprostory, dané parametricky rovnicemi*

$$A_h: \; X = A + \sum_{i=1}^{h} t_i \vec{u}_i, \qquad A_k: \; Y = B + \sum_{j=1}^{k} r_j \vec{v}_j, \quad h \leq k,$$

jsou **rovnoběžné***, právě když vektory $\vec{u}_i$ náleží do podprostoru $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k]$, tj.*

$$\vec{u}_i \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k], \; i = 1, 2, \ldots, h.$$

Jsou **incidentní***, jestliže současně do tohoto podprostoru patří i vektor $B - A$, tj.*

$$B - A \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k].$$

PŘÍKLAD 17.3. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ :*

a) $p: \; x_1 = 1 - t, \; x_2 = 1 + 3t, \; x_3 = -2, \qquad \rho: \; x_1 = 2 + r + 3s, \; x_2 = 3 + 2r + s, \; x_3 = 1 - r - 2s,$

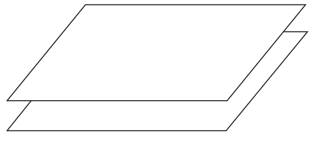
$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= -2, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= 1 - r - 2s, \end{aligned}$$

b)

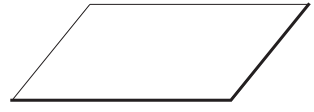
$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 4 + 3t \\ x_3 &= -3 - 4t, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 3 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= -r - 2s. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 17.4. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin $\rho: \; x + y + 2z - 7 = 0, \quad \sigma:$ $x + y + 2z - 5 = 0$.*

V případě dvou *rovin* (obecně *nadrovin*) snadno rozhodneme o jejich rovnoběžnosti, případně totožnosti, porovnáním jejich obecných (neparametrických) rovnic:



$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$
$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + ... + ka_nx_n + b_0 = 0$$



$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$
$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + ... + ka_nx_n + ka_0 = 0$$

17.2 Spojení podprostorů

Důležitou roli v dalším rozboru vzájemných poloh afinních bodových podprostorů bude hrát pojem *spojení podprostorů*, který budeme používat v souvislosti s vektorovými i bodovými podprostory. Zjednodušeně můžeme říci, že spojením dvou podprostorů rozumíme „nejmenší“ podprostor, který obsahuje tyto dva podprostory.

Například spojením dvou vektorových podprostorů $U = [\vec{u}], V = [\vec{v}]$ je vektorový podprostor $W = [\vec{u}, \vec{v}]$. Značíme

$$W = U \bigvee V.$$

Spojením dvou bodových podprostorů $P = [A, \vec{a}], Q = [B, \vec{b}]$ je potom afinní bodový podprostor $R = [A, \vec{a}, \vec{b}, B - A]$. Značíme

$$R = P \bigvee Q.$$

Definice 34 (Spojení dvou vektorových podprostorů)**.** *Spojením dvou vektorových podprostorů $V_h = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h]$, $V_k = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k]$ vektorového prostoru V_n rozumíme jeho podprostor $V_s \subseteq\subseteq V_n$, pro který platí*

$$V_s = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k].$$

Zapisujeme

$$V_s = V_h \bigvee V_k.$$

Věta 39 (O dimenzi spojení a průniku.)**.** *Nechť V_h, V_k jsou podprostory vektorového prostoru V_n. Potom:*

$$\dim (V_h \bigvee V_k) + \dim (V_h \cap V_k) = \dim V_h + \dim V_k.$$

Poznámka. Při zkoumání vzájemných poloh bodových podprostorů výše uvedený vztah nahradíme stručnějším zápisem

$$s + p = h + k,$$

kde $h = \dim V_h$, $k = \dim V_k$, $p = \dim (V_h \cap V_k)$ a $s = \dim (V_h \bigvee V_k)$.

PŘÍKLAD 17.5. *Určete dimenzi podprostoru $W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq R^4$, jestliže*
$W_1 = [(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2)]$, $W_2 = [(-3, 0, 2, 0)]$.

Definice 35 (Spojení bodových podprostorů)**.** *Spojením dvou afinních bodových podprostorů $A_h = [A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h]$ $A_k = [B, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k]$ prostoru A_n rozumíme takový jeho podprostor A_g, pro který platí*

$$A_g = [A; V_g],$$

kde $V_g = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, B - A]$. Zapisujeme

$$A_g = A_h \bigvee A_k.$$

PŘÍKLAD 17.6. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením dvou mimoběžných přímek.*

PŘÍKLAD 17.7. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením roviny A_2 a přímky A_1 s ní rovnoběžné.*

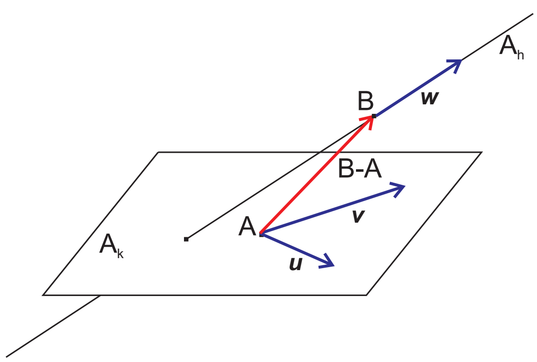
Poznámka. Z definice 35 vyplývá, jaký je vztah mezi dimenzí g spojení dvou afinních bodových podprostorů a dimenzí s spojení jejich zaměření:

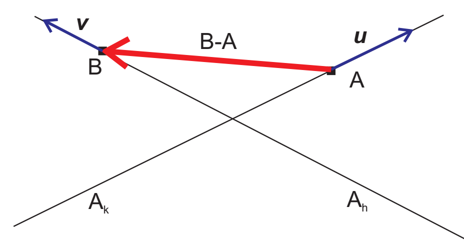
$$A_h \cap A_k = \emptyset \Rightarrow g = s + 1 \qquad (B - A \notin V_s)$$
$$A_h \cap A_k \neq \emptyset \Rightarrow g = s \qquad (B - A \in V_s)$$

PŘÍKLAD 17.8. *Určete dimenzi spojení rovin* $\left[A; \vec{t}, \vec{u}\right]$, $[B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [3, 2, -1, 0]$, $\vec{t} = (2, -1, 3, 1)$, $\vec{u} = (0, -1, 3, -2)$, $B = [4, 2, 0, 0]$, $\vec{v} = (-2, -2, 0, 5)$, $\vec{w} = (-2, -1, 0, 1)$.

17.3 Různoběžné a mimoběžné podprostory

Různoběžné prostory

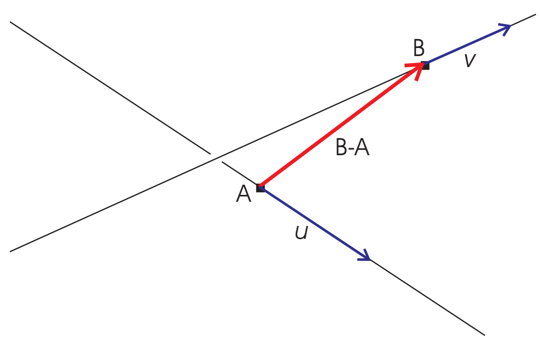




Je zřejmé, že $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, ale v obou případech platí:

$$B - A \in V_h \bigvee V_k.$$

Mimoběžné prostory



Je zřejmé, že tentokrát platí: $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, a zároveň:

$$B - A \notin V_h \bigvee V_k.$$

Věta 40 (Průnik afinních bodových podprostorů). *Dva afinní bodové podprostory $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [B; V_k]$ prostoru A_n mají společný aspoň jeden bod, právě když pro vektor $B - A$ platí:*

$$B - A \in V_s,$$

kde $V_s = V_h \bigvee V_k$.

PŘÍKLAD 17.9. *Určete souřadnice průsečíku přímky p s rovinou ρ :*
$p = [A; \vec{u}]$; $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$;
$\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$; $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

$\{[-1, 0, -3]\}$

PŘÍKLAD 17.10. *V afinním prostoru A_4 určete vzájemnou polohu roviny $\rho = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$ a nadroviny $A_3 = [B; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$:* $A = [3, 3, -1, 3]$, $\vec{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, -1, 0)$, $B = [1, 4, -6, 2]$, $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 3, 1)$.

17.4 Klasifikace vzájemných poloh dvou bodových podprostorů

Budeme zkoumat, jaké vzájemné polohy mohou zaujmout dva dané bodové podprostory A_h, A_k afinního bodového prostoru A_n. Například, jaké vzájemné polohy mohou mít dvě roviny v prostoru A_4. Najdeme odpověď i na otázku, zda mohou být v nějakém prostoru dvě roviny mimoběžné.

Použijeme toto značení:

$$A_h = [A; V_h], \quad A_k = [B; V_k], \quad h \leq k \leq n,$$

$$V_s = V_h \bigvee V_k, \quad V_p = V_h \cap V_k, \quad A_g = A_h \bigvee A_k.$$

Použijeme tyto vztahy:

$$h + k = s + p, \qquad n \geq g, \qquad g = s \text{ nebo } g = s + 1.$$

Zajímá nás vztah mezi n a k

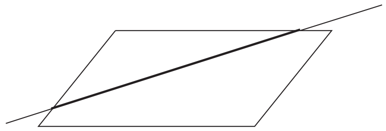
Poznámka. Důležitou roli při klasifikaci vzájemných poloh bodových podprostorů hraje roli dimenze p průniku jejich zaměření, která poukazuje na společné směry těchto zaměření. Hodnoty p mohou být v rozsahu od 0 do h (pokud $h < k$).

Jakých hodnot nabývá dimenze r průniku bodových podprostorů?

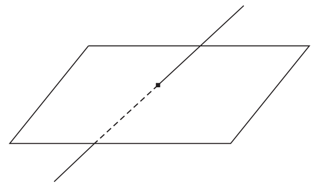
$$A_r = A_h \cap A_k$$

Dimenze **průniku bodových podprostorů** r nemusí být vždy stejná jako dimenze **průniku jejich zaměření** p.

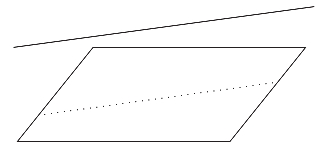
Pokud jsou bodové podprostory A_h, A_k incidentní, tj. $A_h \subseteq\subseteq A_k$ (nebo naopak $A_k \subseteq\subseteq A_h$), nebo jsou A_h, A_k různoběžné, potom je dimenze jejich průniku $A_h \cap A_k$ stejná jako dimenze průniku jejich zaměření $V_h \cap V_k$, tj. $r = p$.



$r = p = 1$



$r = p = 0$



$A_r = \emptyset, \ p = 1$

PŘÍKLAD 17.11. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky a roviny*

Řešení: viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 45.

PŘÍKLAD 17.12. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin* A_h, A_k; $h = k = 2$.

Řešení: viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 46.

17.5 Další příklady na vzájemné polohy afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 17.13. *V afinním prostoru* A_4 *určete vzájemnou polohu rovin* $\rho = \left[A;\vec{t},\vec{u}\right]$, $\sigma = [B;\vec{v},\vec{w}]$: $A = [4,2,2,2]$, $\vec{t} = (1,0,0,-1)$, $\vec{u} = (1,0,3,2)$, $B = [-2,-2,2,0]$, $\vec{v} = (-1,0,5,0)$, $\vec{w} = (2,2,1,0)$.

PŘÍKLAD 17.14. *Určete vzájemnou polohu přímky* p *a roviny* ρ *v* A_3 :

$p: \ x = 2 + 4t, \ y = -1 + t, \ z = 2 - t; \ t \in R,$

$\rho: \ 4x + y - z + 13 = 0.$

PŘÍKLAD 17.15. *Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny* ρ, σ *v* A_3 :

$\rho: \ 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \quad \sigma: \ 3y + 3z - 6 = 0.$

PŘÍKLAD 17.16. *Napište parametrické rovnice přímky* p*, která je průsečnicí rovin* $\rho: \ 5x + y + 2z - 29 = 0$, $\sigma: \ 3x - y + z - 10 = 0$.

PŘÍKLAD 17.17. *V* A_4 *určete podprostor určený nadrovinami:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 5 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$