19 Eukleidovský bodový prostor

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován *skalární součin*. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy *norma vektoru* a *odchylka vektorů*. Ty nyní využijeme k zavedení pojmů *vzdálenost bodů*, *vzdálenost podprostorů*, *odchylka podprostorů*. Vektorový a vnější součin potom již známým způsobem (viz str. 81–89) využijeme k výpočtu obsahů a objemů a zavedeme si nový pojem *objem simplexu*.

19.1 Vzdálenost dvou bodů

Definice 36 (Vzdálenost bodů)**.** *Vzdálenost dvou bodů A, B v eukleidovském bodovém prostoru E_n je rovna normě jimi určeného vektoru $B - A$. Zapisujeme*

$$|AB| = |B - A| = \sqrt{(B - A)^2}.$$

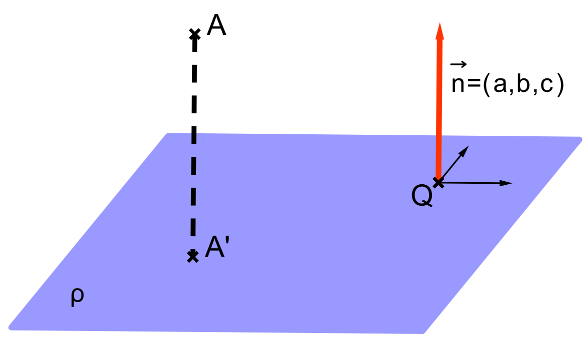
Vzdálenost bodů v E_n má následující vlastnosti:
1) $|AB| = |BA|$,
2) $|AB| \geq 0$, $|AB| = 0$ právě když $A = B$,
3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$ (Trojúhelníková nerovnost),
kde $A, B, C \in E_n$.

Z výhodnosti ortonormální báze pro výpočet skalárního součinu zmíněné na str. 54 vyplývá její výhodnost i pro výpočet vzdálenosti dvou bodů. V eukleidovském prostoru tak vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$, jejichž souřadnice jsou dány vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic (viz Def. 26, str. 98), počítáme dle vztahu

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2},$$

bez ohledu na definici použitého skalárního součinu.

19.2 Vzdálenost bodu od roviny



Vzdálenost $|A\rho|$ bodu A od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do roviny ρ, tj.

$$|A\rho| = |AA'|.$$

Pro vzdálenost bodu A od roviny ρ, určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$, potom platí:

$$|A\rho| = \frac{|(A-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{130}$$

PŘÍKLAD 19.1. *Určete vzdálenost bodu* $A = [3, 6, 1]$ *od roviny* $x + 10y + 7z - 78 = 0$.

Poznámka. Pravou stranu vztahu (130) pro $|A\rho|$ můžeme interpretovat jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - Q$ do směru vektoru $\vec{n}$.

Stejný vztah jako (130) platí i pro vzdálenost bodu A od nadroviny E_{n-1} určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$:

$$|AE_{n-1}| = \frac{|(A-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{131}$$

Obecná rovnice roviny v E_3/nadroviny v E_n

Vztah (130) nás může inspirovat k odvození dalšího způsobu zápisu a výpočtu obecné (neparametrické) rovnice roviny (nadroviny). Stačí, když si uvědomíme, že právě jenom pro body X roviny ρ platí, že jejich vzdálenost od této roviny je rovna nule, tj.

$$|X\rho| = \frac{|(X-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = 0.$$

Potom obecnou (neparametrickou) rovnici roviny v E_3 můžeme zapsat vztahem

$$(X-Q)\cdot\vec{n} = 0, \tag{132}$$

kde Q je bod roviny, $\vec{n}$ je normálový vektor roviny a $X = [x_1, x_2, x_3]$ je obecný bod roviny.

PŘÍKLAD 19.2. *Napište rovnici roviny, která je určená body* $A = [1, -2, 3]$, $B = [-4, 5, 6]$, $C = [7, 8, -9]$.

Řešení: Definujeme vektory $\vec{u} = B - A = (-5, 7, 3), \vec{v} = C - A = (6, 10, -12)$ a vypočítáme normálový vektor $\vec{n}$ dané roviny jako jejich vektorový součin $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = (57, 21, 46)$. Potom obecnou rovnici roviny ABC zapíšeme dle (132) ve tvaru

$$([x, y, z] - [1, -2, 3])\cdot(57, 21, 46) = 0,$$

odkud po úpravě levé strany dostaneme rovnici v algebraickém tvaru

$$57x + 21y + 46z - 153 = 0.$$

Poznámka. Dáme-li dohromady vztahy (130) a (132), dostaneme následující vzoreček pro výpočet vzdálenosti bodu $A = [a_1, a_2, a_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$, dobře známý ze střední školy:

$$|A\rho| = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{133}$$

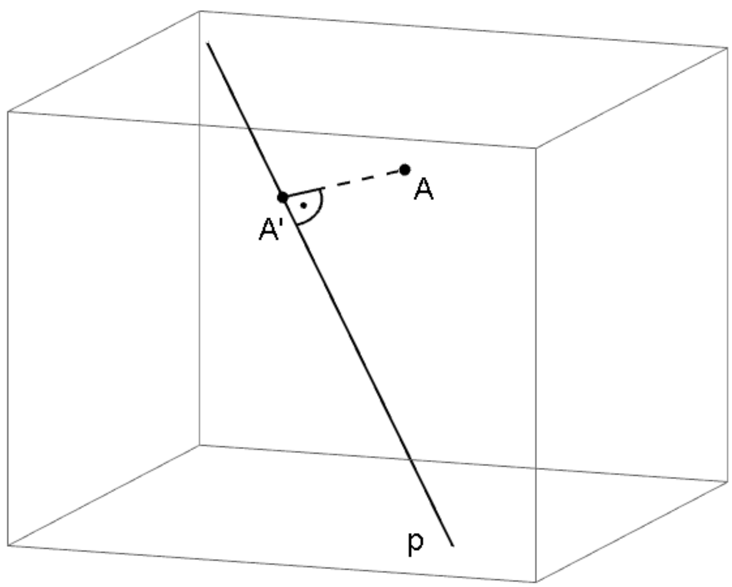
Stejným vztahem jako (132) zapíšeme i obecnou (neparametrickou) rovnici nadroviny, kde Q je potom bod nadroviny, $\vec{n}$ je vektor kolmý na nadrovinu ($\vec{n} \in V_{n-1}^{\perp}$) a $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ je obecný bod nadroviny.

19.3 Vzdálenost bodu od podprostoru

Vzdálenost bodu A od bodového podprostoru E_k je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do tohoto podprostoru.

PŘÍKLAD 19.3. *V eukleidovském prostoru E_3 určete vzdálenost bodu $A = [7, 9, 7]$ od přímky $p : x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t; t \in R$.*

Řešení: Viz Obr. 44. Pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku p, bod $A' =$



Obrázek 44: Jaká je vzdálenost bodu A od přímky p?

$[a_1', a_2', a_3']$, náleží přímce p, proto musí existovat hodnota parametru $t \in R$ taková, že pro její souřadnice platí vztahy $a_1' = 2 + 4t, a_2' = 1 + 3t, a_3' = 2t$. Zároveň musí být vektor $A' - A$ kolmý k směrovému vektoru $\vec{u} = (4, 3, 2)$ přímky p, tj. musí být splněna rovnice

$$(A' - A) \cdot \vec{u} = 0.$$

Po dosazení za A' dostaneme

$$((2 + 4t, 1 + 3t, 2t) - (7, 9, 7)) \cdot (4, 3, 2) = 0,$$

tj.

$$(-5 + 4t, -8 + 3t, -7 + 2t) \cdot (4, 3, 2) = 0.$$

Odtud po výpočtu skalárního součinu a zjednodušení dostáváme lineární rovnici

$$29t - 58 = 0,$$

jejímž řešením je $t = 2$. Bod A' má potom souřadnice $A' = [10, 7, 4]$ a jeho vzdálenost od A je rovna

$$|AA'| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

To je také údaj o vzdálenosti bodu A od přímky p.

Poznámka. Pro řešení příkladu 19.3 můžeme použít také následující vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu A od přímky $p : X = Q + t\vec{u}; t \in R$ v prostoru E_3 :

$$|Ap| = \frac{|(Q - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}. \tag{134}$$

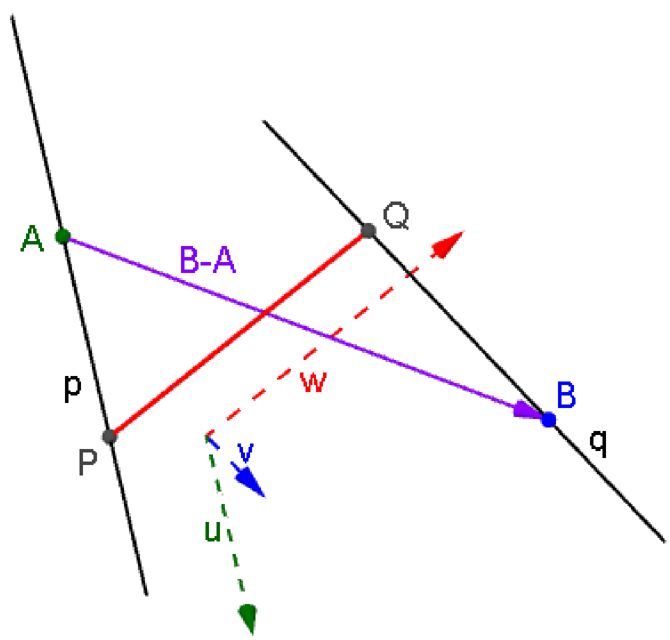
Pokuste se tento vzorec odvodit.

PŘÍKLAD 19.4. *V eukleidovském prostoru E_4 je dán bod $B = [7, 6, 11, 0]$ a rovina $\omega : X = M + k\vec{u} + l\vec{v}$, kde $M = [1, 1, 1, 1]$, $\vec{u} = (3, 2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 0)$. Napište vektorovou rovnici kolmice spuštěné z bodu B na rovinu ω a určete její průsečík B' s rovinou ω. Určete vzdálenost bodu B od roviny ω.*

19.4 Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3

PŘÍKLAD 19.5. *Určete vzdálenost dvou mimoběžek p, q v E_3 : $p : X = A+t\vec{u}, A = [-2, -3, 2], \vec{u} = (4, 2, -1)$, $p : X = B + t\vec{v}, B = [1, 6, 2], \vec{v} = (0, 1, -1)$.*

Řešení: Viz Obr. 45. Vzdálenost $v = |pq|$ dvou mimoběžek p, q je rovna délce jejich



Obrázek 45: Vzdálenost dvou mimoběžek p, q je rovna délce jejich nejkratší příčky PQ, která je kolmá k oběma přímkám.

nejkratší příčky PQ, která je kolmá k oběma přímkám, tj. má směr vektoru $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$.

Vzdálenost v tak spočítáme jako velikost kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{AB}$ (případně úsečky AB) do směru vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$|pq| = \frac{|(A - B) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}. \tag{135}$$

Pro zadané údaje tak dostáváme hodnotu $|pq| = \dfrac{|(3,9,0) \cdot (-1,4,4)|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 4^2}} = \sqrt{33}$.

19.5 Vzdálenost dvou podprostorů v E_n

Pro každé dva podprostory E_r, E_s eukleidovského prostoru E_n, které nemají společný bod určitě existují body $A' \in E_r$ a $A'' \in E_s$ takové, že přímka $A'A''$ je kolmá k oběma podprostorům. *Vzdáleností podprostorů* E_r, E_s potom rozumíme vzdálenosti těchto bodů A', A''.

PŘÍKLAD 19.6. *V eukleidovském prostoru* E_4 *určete vzdálenost rovin* ω, ρ : $\omega : X = [3,5,-2,-3] + k(2,0,-1,-1) + l(0,4,-2,-3)$, $\rho : X = [1,5,-6,8] + k(2,1,2,0) + l(0,-1,1,1)$.

Poznámka. Řešíme stejně jako příklad 19.3.

19.6 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

PŘÍKLAD 19.7. *Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin* $\rho : 2x+3y-6z+14 = 0$, $\sigma : 2x + 3y - 6z - 35 = 0$.

Řešení: Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z nich, uvažujme například bod $K = [k_1, k_2, k_3] \in \rho$, od té druhé z nich, tj. v našem případě od σ. Uvažujme nejprve obecné rovnice příslušných rovin v obecném tvaru $\rho : ax + by + cz + d = 0$, $\sigma : ax + by + cz + e = 0$ (Jsou-li roviny rovnoběžné, koeficienty u prvních tří členů obou rovnic se shodují, nebo se liší o násobek nějakým nenulovým číslem k. V takovém případě stačí příslušnou rovnici tímto k vydělit a bude platit první varianta, že koeficienty u prvních tří členů se shodují.). Podle vztahu (133) platí

$$|K\sigma| = \frac{|ak_1 + bk_2 + ck_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{136}$$

Protože bod K náleží rovině ρ, musí jeho souřadnice splňovat rovnici této roviny, tj. platí $ak_1 + bk_2 + ck_3 + d = 0$. Odtud vyjádříme $ak_1 + bk_2 + ck_3 = -d$ a dosadíme do (136), dostaneme vztah pro výpočet vzdálenosti $|\rho\sigma|$ dvou rovnoběžných rovin ρ, σ, daných obecnými rovnicemi $\rho : ax + by + cz + d = 0$, $\sigma : ax + by + cz + e = 0$:

$$|\rho\sigma| = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pokud je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$, uvedený vztah se zjednoduší na pěkný tvar:

$$|\rho\sigma| = |d - e|.$$

Poznámka. *Vzdálenost dvou rovnoběžných podprostorů prostoru* E_n. Jsou-li E_r, E_s dva rovnoběžné podprostory v E_n, a platí-li $r \geq s$, pak je vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in E_s$ od podprostoru E_r. Jako příklad můžeme uvažovat vzdálenost přímky rovnoběžné s rovinou od této roviny.

20 Odchylka podprostorů

20.1 Odchylka dvou přímek

Pro určení odchylky dvou přímek využíváme odchylku jejich směrových vektorů. Již víme, že hodnoty těchto dvou odchylek se mohou lišit (v tom případě je jejich součtem $180°$). Pro jejich výpočty používáme následující vztahy.

Odchylka dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$

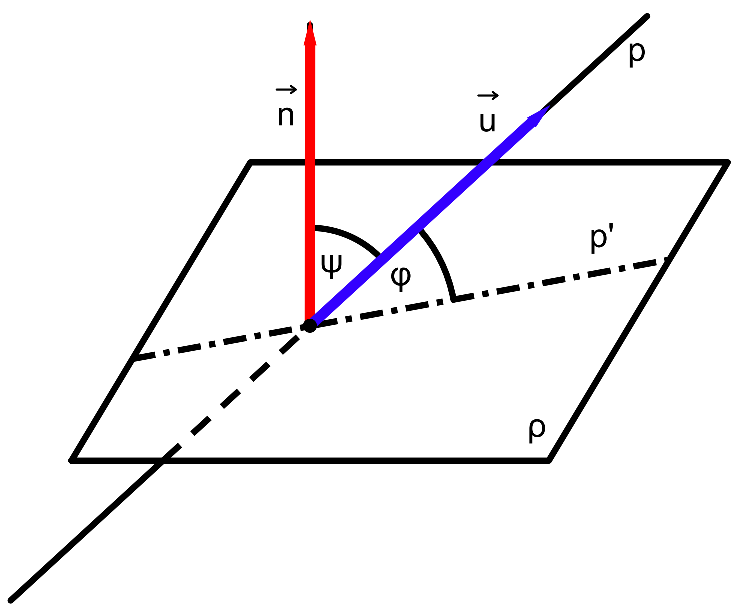
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Odchylka dvou přímek (různoběžek, mimoběžek) se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

PŘÍKLAD 20.1. *Určete odchylku dvou přímek p, q : p : $X = A + t\vec{u}$; $A = [1, 3, -1], \vec{u} = (1, 1, 2)$, q : $X = B + s\vec{v}$; $B = [1, 1, 0], \vec{v} = (3, -2, 1)$.*

20.2 Odchylka přímky od roviny v E_3



Odchylkou přímky p od roviny ρ rozumíme odchylku φ přímky p od jejího kolmého průmětu p' do roviny ρ. Úhel ψ představuje odchylku přímky p od směru normály roviny ρ. Potom platí $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ a tak ze vztahu pro výpočet odchylky přímky p a normály roviny ρ

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

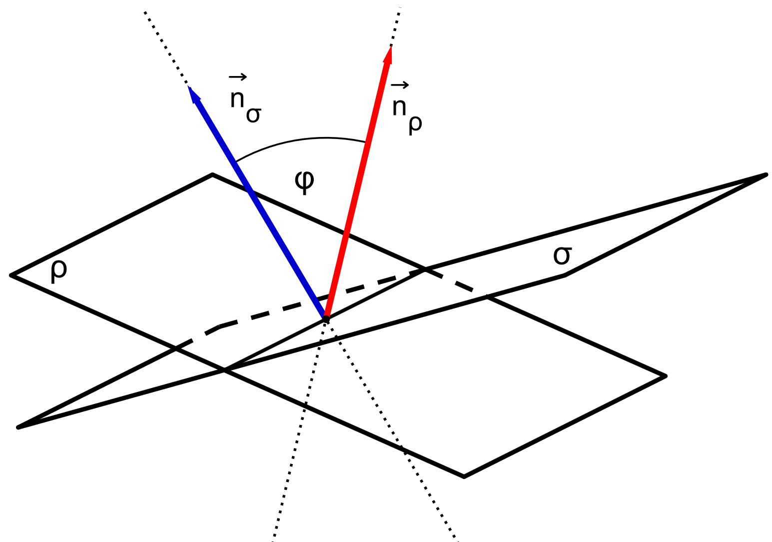
získáme vztah pro výpočet odchylky přímky a roviny

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|},$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ρ.

PŘÍKLAD 20.2. *Určete odchylku přímky AB od roviny ρ : $A = [2, 3, -1]$, $B = [3, 7, 4]$, $\rho : 2x - 3y + z + 4 = 0$.*

20.3 Odchylka dvou rovin v E_3



Odchylkou dvou rovin (nadrovin) v E_3 (E_n) rozumíme odchylku jejich normálových přímek (ortogonálních doplňků).

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho||\vec{n}_\sigma|} \tag{137}$$

Uvažujme roviny $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$, $\sigma = [B; \vec{w}, \vec{z}]$. Potom pro výpočet jejich odchylky φ můžeme modifikovat vzorec (137) na tvar:

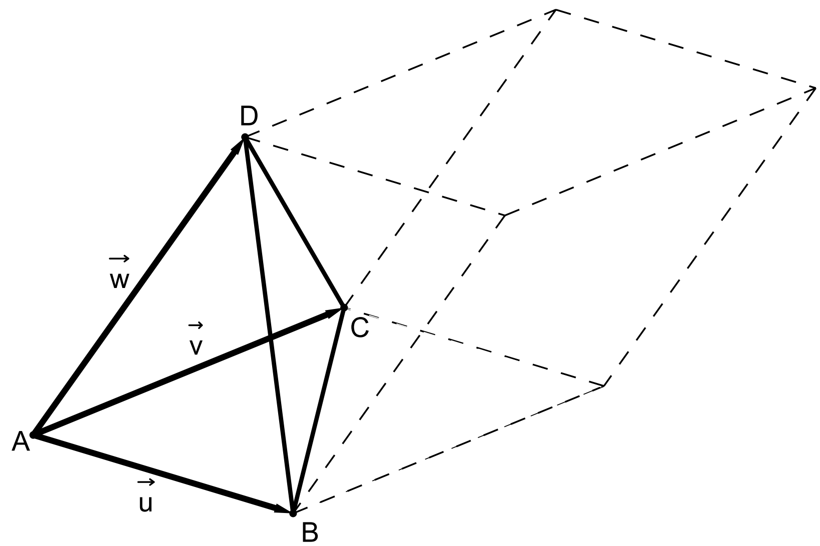
$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z})|}{|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}\times\vec{z}|}$$

PŘÍKLAD 20.3. *V prostoru E_3 určete odchylku φ daných podprostorů E_2', E_2'': $E_2' = [A, \vec{u}, \vec{v}]$; $A = [1, 0, 0], \vec{u} = (1, 1, 2), \vec{v} = (3, 1, 1)$, $E_2'' : x - 2y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 20.4. *V eukleidovském prostoru E_5 určete odchylku nadrovin ω, ρ : $\omega : x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 3 = 0$, $\rho : -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 7 = 0$.*

21 Objem simplexu

PŘÍKLAD 21.1. *Určete objem čtyřstěnu s vrcholy* $A = [3, 4, 0]$, $B = [9, 5, -1]$, $C = [1, 7, 1]$, $D = [3, 2, 5]$.

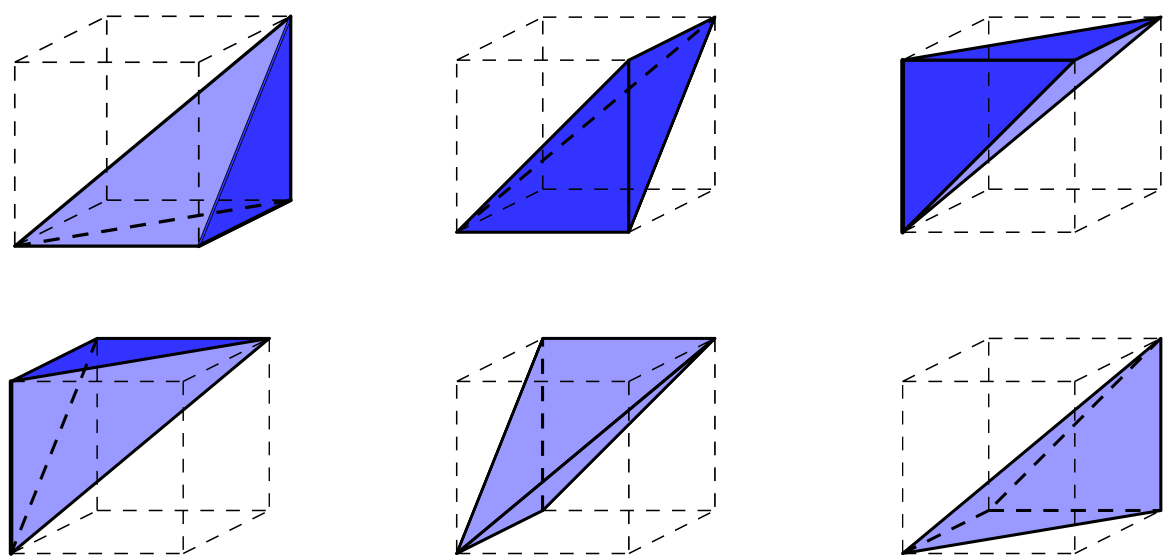


Umíme spočítat objem odpovídajícího rovnoběžnostěnu:

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = |[B - A,\ C - A,\ D - A]|.$$

Otázkou je, jak souvisí objem čtyřstěnu s objemem rovnoběžnostěnu? Odpověď souvisí s řešením následujícího problému.

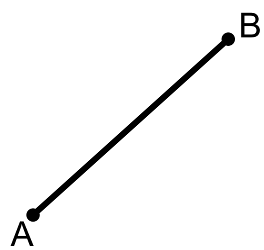
PROBLÉM: Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů téhož objemu můžeme rozřezat krychli?

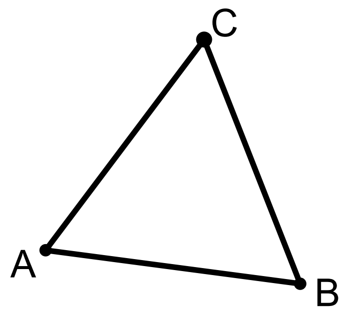


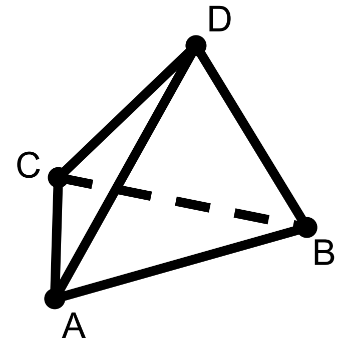
Objem čtyřstěnu $ABCD$:

$$V(A, B, C, D) = \frac{1}{6}|[B - A,\ C - A,\ D - A]|.$$

Simplex
„simplex" = lat. „jednoduchý"







Simplex = konvexní obal $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n. Přitom konvexním obalem množiny bodů rozumíme průnik všech konvexních množin, které tyto body obsahují.

Definice 37 (Objem simplexu)**.** *Objemem simplexu, který je určen $n+1$ body $A_1, A_2, ..., A_{n+1} \in E_n$, rozumíme číslo:*

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left| [A_1 - A_{n+1},\ ...,\ A_n - A_{n+1}] \right| .$$

Pro vyjádření objemu simplexu můžeme použít i tento vztah:

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & 1 \end{array} \right\| .$$

E_2 : **Obsah trojúhelníku** ABC

$$V(A, B, C) = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\| .$$

Poznámka. Heronův vzorec.[1]

E_3 : **Objem čtyřstěnu** $ABCD$

$$V(A, B, C, D) = \frac{1}{6} \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{array} \right\| .$$

Poznámka. Eulerova čtyřbodová relace.[1]

[1]Pro podrobnější studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf