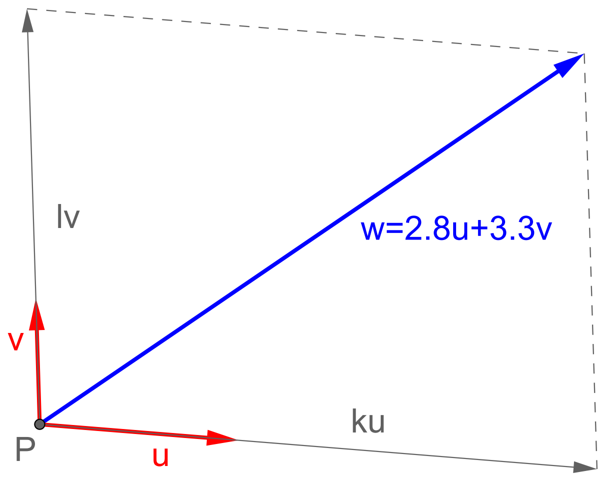
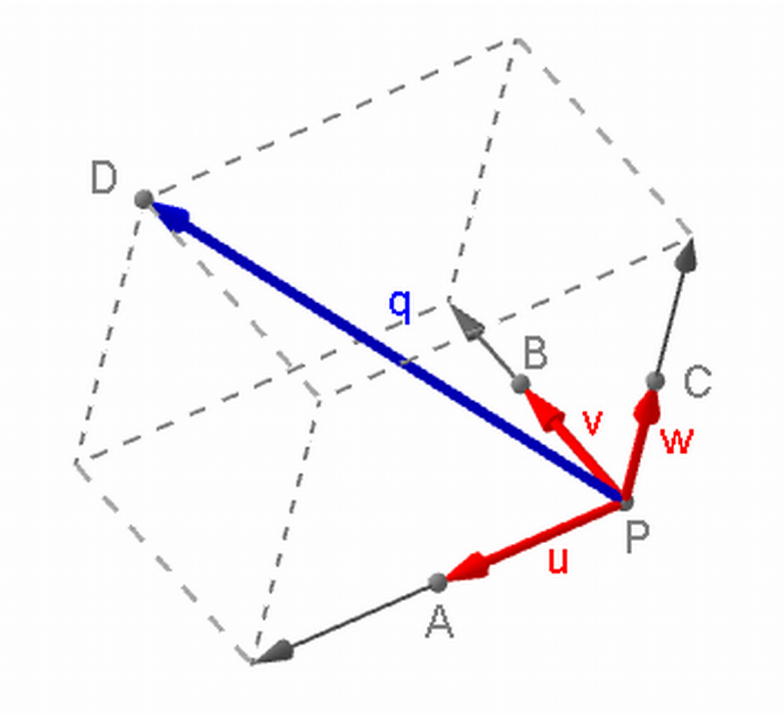
3 Lineární kombinace vektorů. Lineární závislost a nezávislost vektorů.



Obrázek 5: Vektor $\vec{w}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou lineárně závislé.



Obrázek 6: Vektor $\vec{q}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ a $\vec{q}$ jsou lineárně závislé.

3.1 Lineární kombinace vektorů

Definice 4. *Nechť $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ jsou prvky vektorového prostoru V nad tělesem T. Řekneme, že vektor $\vec{u}$ je* **lineární kombinací vektorů** *$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_n$, právě když existují prvky $a_1, a_2, ..., a_n \in T$ tak, že platí:*

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i.$$

Prvky $a_1, a_2, ..., a_n$ nazýváme **koeficienty** *lineární kombinace.*
Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace **triviální***, jinak se nazývá* **netriviální***.*

PŘÍKLAD 3.1. *Ověřte, zda vektor $\vec{u} = (4, -1, 3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.*

PŘÍKLAD 3.2. *Ověřte, zda vektor $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.*

PŘÍKLAD 3.3. *Vymyslete nejméně tři vektory o stejném počtu prvků a vytvořte jejich tři různé lineární kombinace.*

3.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

PŘÍKLAD 3.4. *Množina $M = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$ je tvořena čtyřmi vektory z vektorového prostoru R^3. Rozhodněte, zda je některý z těchto vektorů lineární kombinací ostatních.*

Řešení: Označme dané vektory: $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ a $\vec{v}_4 = (1, 2, 3)$. Potom platí $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{o}$ (V tomto případě se to dá „uvidět“, jinak řešíme příslušnou homogenní soustavu.). Je tedy zřejmé, že každý z daných vektorů se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch zbývajících, například $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Ale pozor! Jak vidíme v následujícím příkladě, ne vždy tomu tak je.

PŘÍKLAD 3.5. *Jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ a $\vec{v}_4 = (0, 2, 1)$. Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících.*

Řešení: Poučeni předcházejícím příkladem se ptáme, zda existují takové koeficienty $k, l, m, n \in R$, pro které platí $k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 + n\vec{v}_4 = \vec{o}$. Po dosazení souřadnic vektorů můžeme psát

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Po vynásobení a sečtení na levé straně obě strany rovnosti (10) porovnáme. To vede k homogenní soustavě lineárních rovnic s maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad \begin{aligned} k &= 0 \\ l + 2n &= 0 \\ m - n &= 0 \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $n = t;\ t \in R$, pro zbývající neznámé platí $k = 0, l = -2t, m = t$, tj. množinou řešení homogenní soustavy je $W = \{(0, -2t, t, t); t \in R\}$. Pro naše účely stačí použít jedno konkrétní řešení. Např. pro $t = 1$ dostáváme řešení $(0, -2, 1, 1)$ a příslušná lineární kombinace má tvar

$$0\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{o}.$$

Z této rovnosti je zřejmé, že každý z vektorů $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících, např. $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_4$. Pro vektor $\vec{v}_1$ to však neplatí! Ten kvůli jeho nulovému koeficientu nemůžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Zobrazte si dané čtyři vektory v GeoGebře a pokuste se odhalit, jak jejich geometrická konfigurace souvisí s řešením příkladu.

PŘÍKLAD 3.6. *Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 1)$, $\vec{c} = (1, 0, 2)$ a $\vec{d} = (2, -1, -1)$. Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících. Zobrazte si vektory v GeoGebře.*

Definice 5 (Lineární závislost a nezávislost vektorů). *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ z vektorového prostoru V nad tělesem T se nazývají:*
a) *vektory* **lineárně nezávislé**, *právě když je pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\forall\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge ... \wedge a_n = 0).$$

b) *vektory* **lineárně závislé**, *právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka. Jak je to pro $n = 1$, tj. je jeden vektor lineárně závislý nebo nezávislý? Vektor $\vec{u}$ je **lineárně nezávislý**, právě když je $\vec{u} \neq \vec{o}$.

PŘÍKLAD 3.7. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů:*
a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{v}_2 = (-2, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (4, -1, 3)$.
b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{u}_2 = (-2, 1, 1),\ \vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$.

Věta 4 (Alternativní definice lineární závislosti)**.** *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$, kde $k > 1$, z vektorového prostoru V nad T jsou* **lineárně závislé** *právě tehdy, když* **aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních**.

Poznámka. Je dobré si uvědomit, že ve větě není vůbec specifikováno, zda se jedná o kombinaci **triviální** či **netriviální**.

Důsledek 1. *Je-li jeden z vektorů nulový, jsou vektory lineárně závislé.*

Důsledek 2. *Jsou-li aspoň dva vektory stejné, jsou vektory $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \ldots,\ \vec{u}_n$ závislé.*

PŘÍKLAD 3.8. *Analogicky s větou 4 vyslovte „alternativní definici lineární nezávislosti“ k vektorů.*

Věta 5. *Jsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ $(k > 1)$ z vektorového prostoru V nad tělesem T lineárně nezávislé, dostaneme vynecháním kteréhokoliv z nich opět lineárně nezávislé vektory.*

Důsledek 3. *Jsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ z vektorového prostoru V nad T lineárně závislé, jsou závislé i vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$, kde $\vec{u}_{k+1}$ je libovolný vektor z V.*

PŘÍKLAD 3.9. *Jsou dány dva lineárně nezávislé vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$. Dokažte, že každý vektor $\vec{u} \in V_2$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

Řešení: Označme souřadnice vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{u} = (u_1, u_2)$. Potom se ptáme, zda existují taková $k, l \in R$, pro která je $\vec{u} = k\vec{a} + l\vec{b}$. Po rozepsání této vektorové rovnice pro jednotlivé souřadnice dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých k, l :

$$a_1k + b_1l = u_1$$
$$a_2k + b_2l = u_2$$

Tato soustava je pro lineárně nezávislé vektory $\vec{a}, \vec{b}$ regulární (proč?). Můžeme ji tak řešit třeba užitím Cramerova pravidla. Dostaneme: $k = \dfrac{u_1b_2 - b_1u_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, l = \dfrac{a_1u_2 - u_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$.
Koeficienty k, l jsou tedy pro dané vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{u}$ určeny jednoznačně.

PŘÍKLAD 3.10. *Jaký je maximální počet lineárně nezávislých vektorů v prostoru V_2 (V_3)?*

3.3 Lineární obal množiny vektorů

PŘÍKLAD 3.11. *Uvažujte vektor* $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$ *z obrázku 5. Charakterizujte množinu všech těchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů* $k, l \in R$.

PŘÍKLAD 3.12. *Uvažujte vektor* $\vec{q} = k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w}$ *z obrázku 6. Charakterizujte množinu všech těchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů* $k, l, m \in R$.

PŘÍKLAD 3.13. *Uvažujte následující množinu vektorů* M *a pokuste se charakterizovat množinu všech jejich lineárních kombinací:*
a) $M = \{(0,0)\}$,
b) $M = \{(1,2)\}$,
c) $M = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$,

Definice 6. *Nechť* $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ *je podmnožina vektorového prostoru* V *(tj. je to množina obsahující* k *vektorů o stejném počtu složek).* **Lineárním obalem** *množiny* M *rozumíme* **množinu všech lineárních kombinací** *vektorů* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$. *Lineární obal množiny* M *značíme* $[M]$ *a platí, že* $[M] \subseteq V$.

Poznámka. Lineární obal množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ značíme $[M]$ nebo také $[\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}]$.

PŘÍKLAD 3.14. *Uvažujme množinu* $M = \{(2,-3,0),(1,0,3)\}$. *Potom lineárním obalem* $[M]$ *množiny* M *je množina všech vektorů* $\vec{v}$, *které se dají zapsat ve tvaru* $\vec{v} = a(2,-3,0) + b(1,0,3)$, *kde* $a, b \in R$.
(Znázornění v GeoGebře: tube.geogebra.org/student/mwxVwhw9W)

PŘÍKLAD 3.15. *Uvažujte množinu vektorů* $M = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$. *Rozhodněte, jakou strukturu tvoří její lineární obal (znázorněte si ho v GeoGebře). Podle definice 3 ověřte, zda to není vektorový prostor. Jaký je vztah* $[M]$ *k aritmetickému vektorovému prostoru* R^3?

Řešení: Lineárním obalem dané množiny vektorů je, stejně jako v příkladu 3.14, rovina procházející počátkem soustavy souřadnic (tj. bodem $(0,0,0)$) rovnoběžně se směry určenými vektory z množiny M. Ověřením jednotlivých vlastností uvedených ve definici 3 zjistíme, že se jedná o **vektorový prostor**. Přesněji hovoříme o **vektorovém podprostoru** vektorového prostoru R^3.

Poznámka. Každý lineární obal je vektorovým prostorem (Zdůvodněte!).

Definice 7. *Nechť* $[M] = V$, *kde* V *je vektorový prostor. Množina* M *se potom nazývá* **množinou (systémem) generátorů** *vektorového prostoru* V. *Říkáme, že množina* M *generuje vektorový prostor* V.

PŘÍKLAD 3.16. *Najděte množiny generátorů pro následující vektorové prostory (Pokuste se najít množiny generátorů o nejmenším počtu vektorů):*
a) Množina všech vektorů (šipek) v rovině a v třírozměrném prostoru.
b) Aritmetický vektorový prostor R^2.
c) Aritmetický vektorový prostor R^1.
d) Aritmetický vektorový prostor R^3.
e) Množina P_n *všech polynomů stupně nejvýše* n *s koeficienty z* R.

PŘÍKLAD 3.17. *Rozhodněte,* **zda platí** *uvedená tvrzení o lineárním obalu množiny* M :
1. $M = \{[2,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
2. $M = \{[2,1],[1,3]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
3. $M = \{[2,1],[4,2]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
4. $M = \{[1,2],[3,4],[1,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
5. $M = \{f(x) = 3\},\ V = \{f(x) = c; c \in R\}$ *potom* $[M] = V$,
6. $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[-2,0,-1]\}$ *potom* $[M] = R^3$,
7. $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[8,-1,5]\}$ *potom* $[M] = R^3$.