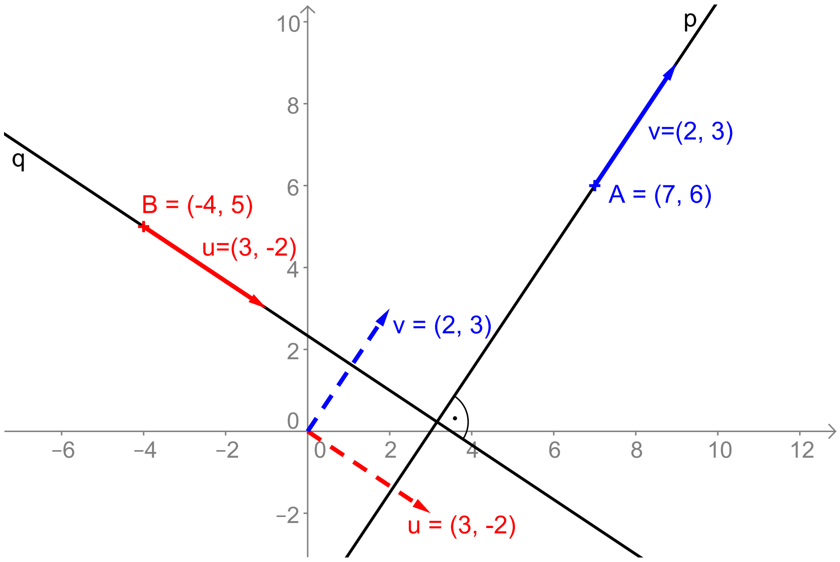
7 Ortogonální a ortonormální vektory

Ze vztahu (25) pro výpočet odchylky dvou vektorů vyplývá, že nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Tato skutečnost nám poslouží k zavedení pojmu *ortogonálních vektorů* a využijeme ji při popisu vektorových a bodových (pod)prostorů i při zkoumání jejich vlastností a vzájemných poloh.

PŘÍKLAD 7.1. *Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $A = [7,6]$ kolmo na přímku $q: \ x = -4 + 3t, y = 5 - 2t; \ t \in R$.*

Řešení: Z parametrických rovnic přímky q vyplývá, že tato přímka je určena bodem $B = [-4,5]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (3,-2)$ (viz Obr. 13). Má-li být přímka p



Obrázek 13: Přímka p jdoucí bodem A kolmo k přímce q

kolmá k přímce q, je zřejmé, že každý její směrový vektor $\vec{v}$ je kolmý k vektoru $\vec{u}$. K řešení úlohy proto postačuje najít jeden nenulový vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, který splňuje rovnost $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Jeho souřadnice jsou tedy řešením rovnice

$$3v_1 - 2v_2 = 0.$$

Z nekonečně mnoha takových řešení vybereme jedno konkrétní, nabízí se např. $(v_1, v_2) = (2,3)$. Hledaná přímka p má potom parametrické rovnice $p: \ x = 7+2t, y = 6 + 3t; \ t \in R$.

Pojem *ortogonální vektory* (k němuž přidáme ještě pojem *ortonormální vektory*) si definujeme nejprve pro dvojici vektorů.

Definice 15 (Dvojice ortogonálních a ortonormálních vektorů)**.** *Dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Jsou-li navíc jednotkové, tj. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$, nazýváme je ortonormální.

Poznámka. Uvažujeme-li Eukleidovský skalární součin, je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jednotkový právě tehdy, když je splněna podmínka

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1,$$

kterou lze po umocnění obou stran na druhou vyjádřit ve tvaru

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

O vektorech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tak můžeme říci, že jsou *ortonormální* právě tehdy, když současně platí

$$\begin{aligned} u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1, \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jako ortogonální či ortonormální můžeme označit i větší skupinu vektorů, jak uvádí následující definice.

Definice 16 (Ortogonální a ortonormální vektory)**.** *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0,$$

pro všechna $i, j = 1, 2, ..., k$; $i \neq j$. Jsou-li navíc všechny vektory jednotkové, tj.

$$|\vec{u}_i| = 1,$$

pro všechna $i = 1, 2, ..., k$, nazýváme je ortonormální.

Poznámky.

1. Ortogonální vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme takto

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Ortogonalita je zobecněním kolmosti. Protože kromě termínu „ortogonální vektory“ používáme též označení „kolmé vektory“, je dobré mít na paměti, že definice ortogonálních vektorů připouští i nulový vektor a vyplývá z ní, že nulový vektor je ortogonální ke všem vektorům. Hovoříme-li o kolmých vektorech, uvažujeme vesměs vektory nenulové.

3. Pojmem *ortogonální vektory* označujeme skupinu dvou, ale i více vektorů, které splňují definici 16. Tj. skupinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ nazveme ortogonální, když pro každé dva *různé* vektory z nich platí $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$.

4. *Ortonormální* jsou vektory, které jsou *ortogonální* a navíc všechny *jednotkové*, tj. platí:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_i^j$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

8 Ortonormální báze

Bází vektorového (pod)prostoru je jakákoliv množina jeho generátorů, která je lineárně nezávislá. Výlučné postavení mezi všemi bázemi mají díky svým vlastnostem tzv. *ortonormální báze*, tj. báze, jejichž vektory jsou *ortonormální* (viz def. 16).

Definice 17 (Ortogonální a ortonormální báze)**.** *Bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ vektorového prostoru V se skalárním součinem nazveme ortogonální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortogonální.*
Bázi B nazveme ortonormální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortonormální.

Poznámka. Báze B je tedy ortonormální, jestliže

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_i^j$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

Příklad: Rozhodněte, zda se jedná o ortogonální či ortonormální báze:

a) $B_1 = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$,

b) $B_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$,

c) $B_3 = \{(2,0,0), (0,-1,0), (0,0,4)\}$.

Věta 19. *Jsou-li nenulové vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, $n \in N$, ortogonální, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že nenulové ortogonální vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé. Aspoň jeden koeficient k_i lineární kombinace

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots k_n\vec{u}_n = \vec{o} \tag{27}$$

tak musí být různý od nuly. Nechť je to třeba k_1. Pokud nyní skalárně vynásobíme obě strany rovnosti (27) vektorem $\vec{u}_1$, dostaneme rovnost

$$k_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \ldots k_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 = \vec{o} \cdot \vec{u}_1, \tag{28}$$

na jejíž levé straně jsou všechny členy kromě prvního díky předpokládané ortogonalitě vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ rovny nule. Rovnost (28) se tak redukuje na tvar

$$k_1\vec{u}_1^2 = 0, \tag{29}$$

kde $\vec{u}_1^2 \neq 0$ (vektory $\vec{u}_i$ jsou dle předokladu nenulové). Potom ale musí být $k_1 = 0$, což je ale ve sporu s předpokladem, že $k_1 \neq 0$. Tím je pravdivost věty dokázána. □

8.1 Výhody ortonormální báze

Uvedeme si dvě výhody, které nám oproti „obyčejné“ bázi přinese použití ortonormální báze.

8.1.1 Výpočet skalárního součinu

Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ určeny souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, je jakýkoliv skalární součin těchto vektorů dán vztahem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n,$$

bez ohledu na jeho konkrétní definici.

Tuto zajímavou a velice užitečnou skutečnost snadno dokážeme. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů báze B

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n, \quad \vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n$$

a skalárně je spolu vynásobíme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n) \cdot (v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n). \tag{30}$$

Pravou stranu (30) roznásobíme užitím vlastností 2 a 3 z definice skalárního součinu (viz def. 12). Dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1\vec{b}_1^2 + u_1v_2\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + u_1v_n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + \\ +u_2v_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + u_2v_2\vec{b}_2^2 + \cdots + u_2v_n\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \\ + \cdots + \\ +u_nv_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + u_nv_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \cdots + u_nv_n\vec{b}_n^2, \end{aligned} \tag{31}$$

kde ovšem, díky ortonormálnosti báze B, pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ pokud $i \neq j$, jinak $\vec{b}_i^2 = 1$. Rovnost (31) je tak pro každou ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ ekvivalentní rovnosti

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n, \tag{32}$$

bez ohledu na to, jak je definován skalární součin „$\cdot$“.

Poznali jsme, že pokud používáme ortonormální bázi (a my tak činíme, protože neníli řečeno jinak, pracujeme se souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi), nemusíme se starat o definici skalárního součinu a počítáme ho tak, jak jsme zvyklí ze střední školy.

8.1.2 Určení souřadnic vektoru vzhledem k ortonormální bázi

Uvažujme vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, jehož souřadnice $u_1, u_2, ..., u_n$ jsou dány vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, tj.

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + ... + u_n\vec{b}_n. \tag{33}$$

Potom pro $i-$tou souřadnici u_i vektoru $\vec{u}$ platí

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i, \tag{34}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah (34) nám umožňuje rychlý výpočet jednotlivých souřadnic vektoru. Podstatu jeho důkazu si ukážeme na případu $i = 1$, zobecnění pro $i = 1, 2, \ldots, n$ bude zřejmé. Jestliže vynásobíme obě strany (33) vektorem $\vec{b}_1$, dostaneme rovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = u_1\vec{b}_1^2 + u_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + ... + u_n\vec{b}_n \cdot \vec{b}_1, \tag{35}$$

která je díky ortonormálnosti vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ ekvivalentní s rovností

$$u_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_1.$$

Pro zobecnění stačí zaměnit 1 za i a uvažovat $i = 1, 2, \ldots, n$.

PŘÍKLAD 8.1. *Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (1, 1, 1)$ vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\vec{u}_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$,*

Řešení: Označme v_i^B $i-$tou souřadnici vektoru $\vec{v}$ vzhledem k B. Potom $v_1^B = (1, 1, 1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $v_2^B = (1, 1, 1)\cdot(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $v_3^B = (1, 1, 1)\cdot(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}) = \frac{4}{\sqrt{30}}$.

8.2 Gram–Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 8 nám zaručuje, že každý konečně generovaný vektorový prostor má alespoň jednu konečnou bázi. Poté, co jsme se seznámili s výhodami ortonormální báze, je zřejmé, že bychom uvítali stejnou záruku i pro existenci ortonormální báze. A skutečně, taková záruka existuje, pro vektorové prostory se skalárním součinem nám ji dává následující věta.

Věta 20 (Existence ortonormální báze)**.** *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor se skalárním součinem má aspoň jednu ortonormální bázi.*

Důkaz. Existence konečné báze je zaručena větou 8. K důkazu věty 20 tak postačí ukázat, že z každé konečné báze uvažovaného vektorového (pod)prostoru můžeme vytvořit bázi ortonormální. To skutečně možné je. Garantuje nám to postup známý jako *Gram–Schmidtův ortogonalizační proces.* Místo důkazu věty 20 si podrobně rozebereme tento postup pro případ vektorových prostorů dimenze dva a tři. Zobecnění postupu pro případ vektorového prostoru dimenze n, které je podstatou důkazu věty, je potom zřejmé. □

Gram–Schmidtův ortogonalizační proces se týká vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru, využíváme ho však především k určování ortonormálních bází vektorových podprostorů. V případě vektorových prostorů můžeme vždy „sáhnout“ po kanonické bázi (tj. například pro R^2 je to $\{(1,0),(0,1)\}$).

Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 2

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (19) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{a}_1$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1. \tag{36}$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{a}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + k\vec{b}_1 \tag{37}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + k\vec{b}_1^2 = 0. \tag{38}$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}, \tag{39}$$

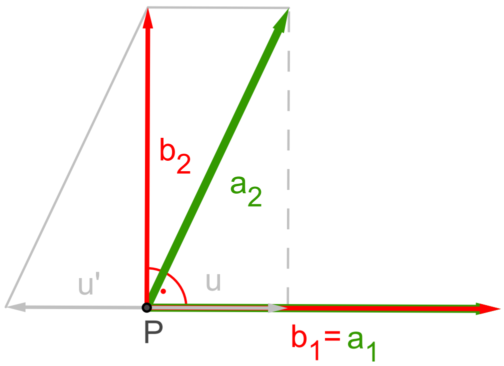
kterou dosadíme do vztahu (37) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{40}$$

Rovnostmi (36) a (40) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{41}$$

Poznámka. Vztah (39) pro výpočet vektoru $\vec{b}_2$ kolmého k vektoru $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ můžeme odvodit „ryze geometricky“, bez nutnosti řešit rovnici (38) pro neznámou k. Použijeme k tomu obrázek 15 (nebo příslušný aplet vytvořený v GeoGebře). Vidíme, že vektor $\vec{b}_2$, který má být kolmý k $\vec{b}_1$, dostaneme jako součet vektoru $\vec{a}_2$ s vektorem $\vec{u}'$, který je vektorem opačným k vektoru $\vec{u}$, jehož velikost je rovna kolmému průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$.



Obrázek 14: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 2 - vytvoření ortogonální báze

Pro velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$ platí

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1|}{|\vec{b}_1|}. \tag{42}$$

Přitom výraz $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \geq 0$ pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ a $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 < 0$ pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, kde φ je úhel mezi vektory $\vec{b}_1$ (tj. také $\vec{a}_1$) a $\vec{a}_2$). Pravdivost tohoto vztahu pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ snadno prokážeme rozepsáním jeho pravé strany podle vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů. Dostaneme vztah

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{|\vec{a}_2||\vec{b}_1|\cos\varphi}{|\vec{b}_1|} = |\vec{a}_2|\cos\varphi,$$

který odpovídá definici hodnoty funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku ($|\vec{a}_2|$ je délka přepony, $|\vec{u}|$ je délka odvěsny přilehlé k úhlu φ). Pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ stačí uvažovat úhel $\pi - \varphi$.

Známe tedy velikost vektoru $\vec{u}$ (viz (42)) a víme, že má směr vektoru $\vec{b}_1$ (nebo opačný, pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$). Stačí tedy vynásobit číslem $\dfrac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}$ jednotkový vektor směru $\vec{b}_1$ a dostaneme vektor $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1$$

Podle obrázku 15 je potom vhodným vektorem $\vec{b}_2$ součet $\vec{a}_2 + \vec{u}'$, kde $\vec{u}' = -\vec{u}$, tj.

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{u}' = \vec{a}_2 - \vec{u} = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{43}$$

Vztah (43) je totožný se vztahem (39). Geometrickou úvahou jsme tak dostali stejný výsledek jako výpočtem. (*konec poznámky*)

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} \quad . \tag{44}$$

Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 3

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (19) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

Postup vytvoření prvních dvou vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze je identický s výše popsaným případem podprostoru dimenze 2. Platí tedy

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{45}$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ a $\vec{a}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 \tag{46}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 + n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 = 0, \tag{47}$$
$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + n\vec{b}_2^2 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 + n\vec{b}_2^2 = 0. \tag{48}$$

Z těchto podmínek (47), (8.2) kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}, \quad n = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2} \tag{49}$$

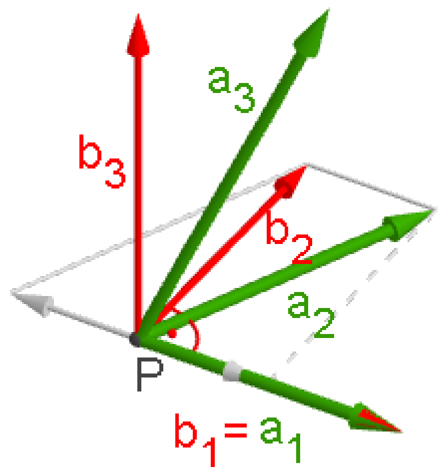
které dosadíme do vztahu (46) pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{50}$$

Rovnostmi (45) a (50) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{51}$$

Poznámka. I v případě nalezení třetího vektoru ortogonální báze můžeme uplatnit „ryze geometrický“ přístup. Tentokrát bychom použili opačné vektory ke dvěma kolmým průmětům vektoru $\vec{a}_3$ do směrů vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$, které bychom složili s vektorem $\vec{a}_3$, abychom dostali vektor $\vec{b}_3$ kolmý na oba vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$. Detailně se zde tímto postupem nebudeme zabývat.



Obrázek 15: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 3 - vytvoření ortogonální báze

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}. \tag{52}$$

PŘÍKLAD 8.2. *Určete ortonormální bázi podprostoru $W \subseteq\subseteq R^3$, který je generován vektory $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$.*

Řešení:
I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{v}_1 = (1,1,2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1,1,2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1,1,2)$ a $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + k\vec{b}_1 = (0,1,-1) + k(1,1,2) \tag{53}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1,1,2)\cdot(0,1,-1) + k(1,1,2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1,1,2)\cdot(0,1,-1)}{(1,1,2)^2} = \frac{1}{6},$$

kterou dosadíme do vztahu (53) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (0,1,-1) + \frac{1}{6}(1,1,2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{-2}{3}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 6, abychom se zbavili zlomků. Tuto úpravu oceníme zanedlouho při normování vektoru. Hledanou ortogonální bázi podprostoru W tak tvoří vektory

$$\vec{b}_1 = (1,1,2), \quad \vec{b}_2 = (1,7,-4). \tag{54}$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{-4}{\sqrt{66}}\right). \tag{55}$$

Řešení v programu wxMaxima:

(%i1) `load(eigen);`

(%o1) $C : /PROGRA~2/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.26.0/share/matrix/eigen.ma$

(%i2) `b:gramschmidt({[1,1,2],[0,1,-1]});`

(%o2) $[[0,1,-1],[1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}]]$

(%i3) `e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);`

(%o3) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

(%o4) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}}]$

Poznámka. Vidíme, že algoritmus, který se skrývá za příkazem „gramschmidt“, nezpracovává vektory v pořadí, v jakém je zadáme, ale volí si optimální pořadí sám. Stejně můžeme postupovat i my.

PŘÍKLAD 8.3. *Určete ortonormální bázi vektorového prostoru* $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$ *;* $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$.

Řešení:
I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$ a $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{u}_2 + k\vec{b}_1 = (1, 0, 1, 1) + k(1, 1, -1, -2) \tag{56}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1, 1, -1, -2) \cdot (1, 0, 1, 1) + k(1, 1, -1, -2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1, 1, -1, -2) \cdot (1, 0, 1, 1)}{(1, 1, -1, -2)^2} = \frac{2}{7},$$

kterou dosadíme do vztahu (56) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (1, 0, 1, 1) + \frac{2}{7}(1, 1, -1, -2) = \left(\frac{9}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 7, abychom se zbavili zlomků. Dostaneme

$$\vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3).$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3)$ a $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$

$$\vec{b}_3 = \vec{u}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 = (0, 1, 1, 0) + m(1, 1, -1, -2) + n(9, 2, 5, 3)$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = (1, 1, -1, -2) \cdot (0, 1, 1, 0) + m(1, 1, -1, -2)^2 + n(1, 1, -1, -2) \cdot (9, 2, 5, 3) = 7m = 0,$$
$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = (9, 2, 5, 3) \cdot (0, 1, 1, 0) + m(9, 2, 5, 3) \cdot (1, 1, -1, -2) + n(9, 2, 5, 3)^2 = 7 + 119n = 0.$$

Z těchto podmínek kolmosti vektorů ortogonální báze (všimněte si, že v tomto případě jsou vektory $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$ a $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$ již na sebe kolmé) vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = 0, \quad n = -\frac{1}{17}$$

které dosadíme do vztahu pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = (0,1,1,0) + 0(1,1,-1,-2) - \frac{1}{17}(9,2,5,3) = \left(-\frac{9}{17}, \frac{15}{17}, \frac{12}{17}, -\frac{3}{17}\right).$$

Vektor $\vec{b}_3$ násobíme 17, abychom se zbavili zlomků. Potom vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W jsou

$$\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2), \quad \vec{b}_2 = (9,2,5,3), \quad \vec{b}_3 = (-9,15,12,-3).$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru* W

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right), \\
\vec{e}_2 &= \left(\frac{9}{\sqrt{119}}, \frac{2}{\sqrt{119}}, \frac{5}{\sqrt{119}}, \frac{3}{\sqrt{119}}\right), \\
\vec{e}_3 &= \left(-\frac{9}{\sqrt{459}}, \frac{15}{\sqrt{459}}, \frac{12}{\sqrt{459}}, -\frac{3}{\sqrt{459}}\right).
\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima (kód navazuje na řešení předcházejícího příkladu):

```
(%i5) kill(b);
```

(%o5) *done*

```
(%i6) b:gramschmidt({[1,1,-1,-2],[1,0,1,1],[0,1,1,0]});
```

(%o6) $[[0,1,1,0],[1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1],[\frac{3^2}{5},\frac{3}{5},-\frac{3}{5},-\frac{2\,3}{5}]]$

```
(%i7) e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);
      e[3]:unitvector(b[3]);
```

(%o7) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]$

(%o8) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}]$

(%o9) $[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}]$

Poznámka. Příkaz „gramschmidt" opět volil jiné pořadí zpracování vektorů a našel jinou ortogonální bázi, s „lépe vypadajícími" vektory.

Kromě volby vhodného pořadí vektorů si ruční výpočet vektorů ortonormální báze daného podprostoru můžeme v řadě případů podstatně zjednodušit také tím, že daný systém generátorů nahradíme vektory, které jsme získali eliminací příslušné matice. V případě příkladu 8.3 jsme tak mohli místo původních vektorů $(1, 1, -1, -2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)$ počítat s vektory $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)$, které generují stejný podprostor, protože

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vyzkoušejte!