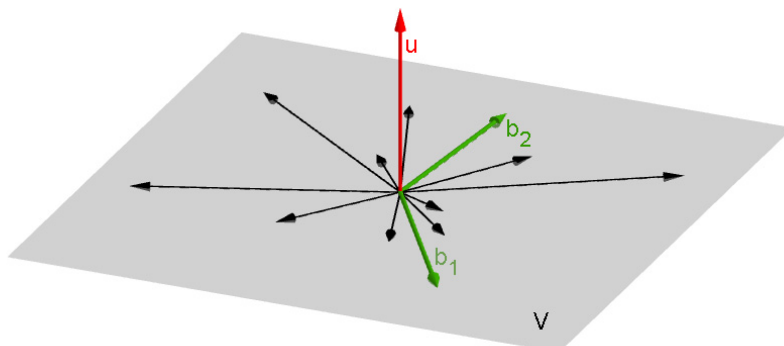
9 Kolmost vektorových podprostorů

Od kolmosti dvou vektorů nyní přejdeme ke kolmosti dvou vektorových podprostorů. Budeme se zabývat otázkou, kdy jsou dva vektorové podprostory na sebe kolmé a jak to poznáme. Začneme tím, že stanovíme, jak určit kolmost jednoho vektoru k podprostoru.

9.1 Kolmost vektoru k podprostoru



Obrázek 16: Vektor $\vec{u}$ kolmý k podprostoru $V = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$

Definice 19 (Kolmost vektoru k podprostoru)**.** *O vektoru $\vec{u}$ řekneme, že je kolmý k vektorovému podprostoru V_k, právě když je kolmý ke každému vektoru z tohoto podprostoru. Značíme*

$$\vec{u} \perp V_k.$$

Uvedená definice nám nedává přímý návod, jak o kolmosti vektoru k vektorovém podprostoru rozhodnout. Vektorů je ve vektorovém podprostoru nekonečně mnoho a ověření kolmosti daného vektoru ke každému z nich je proto nereálné. Naštěstí však víme, že každý vektor z vektorového podprostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů jeho báze, a báze už má konečný počet vektorů (viz Obr. 16).

Věta 21 (Kritérium kolmosti vektoru k podprostoru)**.** *Vektor $\vec{u} \in V_n$ je kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k\}$.*

Důkaz. Podle definice 19 je vektor $\vec{u} \in V_n$ kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$ právě tehdy, když je kolmý ke každému vektoru $\vec{v} \in V_k$, tj. když pro každý vektor $\vec{v} \in V_k$ platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{61}$$

Protože $V_k = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k]$, můžeme každý vektor $\vec{v} \in V_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{b}_k$. Po dosazení do (61) a roznásobení tak dostáváme rovnost

$$v_1\vec{u} \cdot \vec{b}_1 + v_2\vec{u} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0, \tag{62}$$

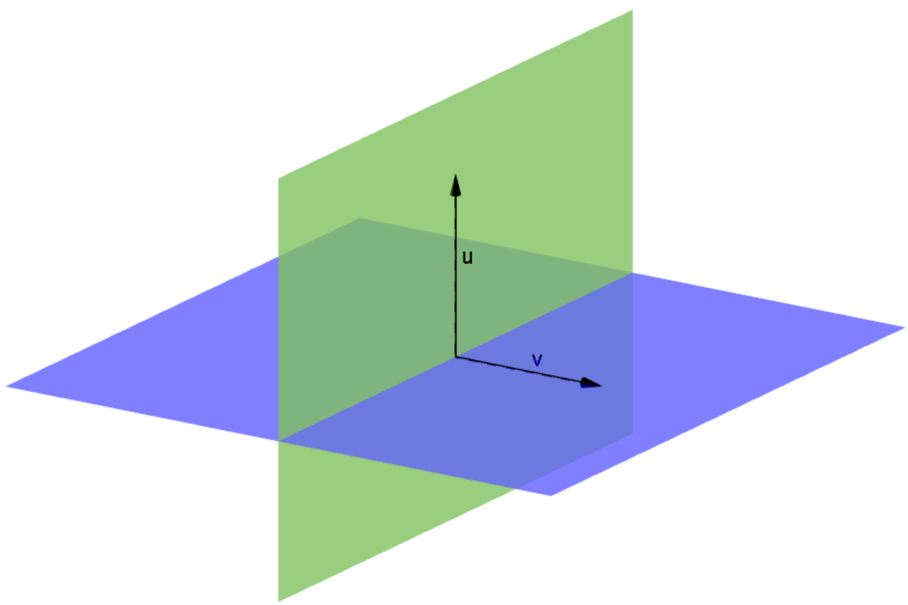
která je určitě splněna, jestliže je vektor $\vec{u}$ kolmý ke všem vektorům báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k$, tj., jestliže

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2 = \cdots = \vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0. \tag{63}$$

$\square$

9.2 Kolmost dvou podprostorů

Kolmost vektoru k vektorovému podprostoru využijeme v definici a při určení kolmosti dvou vektorových podprostorů.



Obrázek 17: Dva kolmé podprostory

Definice 20 (Kolmost vektorových podprostorů)**.** *Dva vektorové podprostory* $V_r, V_s \subseteq\subseteq V_n$ *jsou na sebe kolmé, jestliže v každém z nich existuje vektor, který je kolmý k druhému podprostoru. Značíme*

$$V_r \perp V_s$$

Při rozhodování o kolmosti dvou konkrétních vektorových podprostorů daných svými bázemi budeme využívat „nutnou a postačující podmínku kolmosti dvou podprostorů“, která je formulována v následující větě 22. Než ji uvedeme, objasníme si její smysl (a tím i myšlenku jejího důkazu, který přenecháme čtenáři) na příkladu dvou podprostorů dimenzí 2 a 3.

PŘÍKLAD 9.1. *Rozhodněte, za jakých podmínek jsou na sebe kolmé podprostory* $V_2 = [\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}], V_3 = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}]$

Řešení: Dle definice 20 jsou dané dva vektorové podprostory V_2, V_3 na sebe kolmé, jestliže v prostoru V_2 existuje nějaký vektor $\vec{x}$, který je kolmý k podprostoru V_3, a zároveň v podprostoru V_3 existuje vektor $\vec{y}$ kolmý k prostoru V_2. K popsání těchto skutečností využijeme tvrzení věty 21 („vektor je kolmý k podprostoru, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze").

1. Existuje vektor $\vec{x} \in V_2$, který je kolmý k V_3.

Jestliže vektor $\vec{x}$ náleží podprostoru V_2, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Dle věty 21 je vektor $\vec{x}$ kolmý k podprostoru V_3, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{b}_1 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 = 0, \\
\vec{x} \cdot \vec{b}_2 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0, \\
\vec{x} \cdot \vec{b}_3 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Homogenní soustava (64) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$A_1 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{65}$$

má hodnost menší než 2.

2. Existuje $\vec{y} \in V_3$, který je kolmý k V_2.

Jestliže vektor $\vec{y}$ náleží podprostoru V_3, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Dle věty 21 je vektor $\vec{y}$ kolmý k podprostoru V_2, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned}
\vec{y} \cdot \vec{a}_1 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0 \\
\vec{y} \cdot \vec{a}_2 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_2 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_2 = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

Homogenní soustava (66) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$A_2 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{67}$$

má hodnost menší než 3 (což je v tomto případě určitě splněno).

Vidíme, že pro kolmost podprostorů V_2, V_3 jsou rozhodující hodnosti matic A_1, A_2. Protože $A_2 = A_1^T$ a $h(A_2) = h(A_1^T)$, stačí uvažovat jenom jednu z těchto matic, například A_2, kterou v souladu s následující větou označíme G. Aby byly podprostory

V_2, V_3 na sebe kolmé, tj. aby měly obě uvedené soustavy (64), (66) nenulová řešení, musí být hodnost matice

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{68}$$

menší než 2. V obecném případě bychom řekli, že hodnost takovéto matice musí být menší než minimum z dimenzí posuzovaných vektorových prostorů, jak uvádí následující věta.

Věta 22 (Nutná a postačující podmínka kolmosti dvou podprostorů). *Dva vektorové podprostory V_r a V_s s bázemi $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ a $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když pro hodnost matice*

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_s \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_r \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_s \end{bmatrix}$$

platí

$$h(G) < \min(r, s).$$

PŘÍKLAD 9.2. *Rozhodněte, zda jsou dané vektorové podprostory prostoru R^4 na sebe kolmé:*

a) $V_2 = [(1, 0, 1, 1), (0, 2, -1, 1)],\ V_3 = [(0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 2), (1, 2, 1, -2)]$,

b) $V_2 = [(1, 1, 2, -1), (3, 0, 1, -1)],\ V_3 = [(1, 0, 1, 2), (2, -3, 2, 2), (1, 1, 1, -2)]$,

c) $V_1 = [(1, 0, -1, 2)],\ V_3 = [(0, 1, 2, 1), (1, 3, -1, -1), (2, 1, 0, -1)]$.

Poznámka. Zvláštní kategorii vzájemně *kolmých podprostorů* daného vektorového prostoru V_n tvoří tzv. *totálně kolmé podprostory*. Jedná se o dvojice podprostorů, které jsou kolmé a součet jejich dimenzí je přitom roven n. Říkáme, že tyto podprostory jsou vzájemně svými *ortogonálními doplňky*.

9.3 Ortogonální doplněk vektorového podprostoru

PŘÍKLAD 9.3. *Určete množinu všech vektorů z V_3, které jsou kolmé (ortogonální) k vektoru $\vec{u} = (2, 1, -3)$.*

Řešení: Hledáme množinu $W \subseteq V_3$, pro kterou platí: $\forall \vec{x} \in W;\ \vec{u} \cdot \vec{x} = 0$, tj. množinu všech řešení homogenní rovnice

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \tag{69}$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$. Rovnici (69) můžeme uvažovat jako „soustavu“ jedné rovnice o třech neznámých. Potom dvě ze tří neznámých, např. x_1 a x_3 nahradíme reálnými parametry a zbývající neznámou x_2 dopočítáme. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= r, \\ x_3 &= s, \\ x_2 &= -2r + 3s;\ r, s \in R \end{aligned} \tag{70}$$

a hledanou množinu W zapíšeme ve tvaru

$$W = \{(r, -2r + 3s, s); r, s \in R\}. \tag{71}$$

Protože $W = \{(r, -2r+3s, s); r, s \in R\} = \{r(1, -2, 0)+s(0, 3, 1); r, s \in R\}$, můžeme W psát jako lineární obal dvojice vektorů $(1, -2, 0), (0, 3, 1)$,

$$W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]. \tag{72}$$

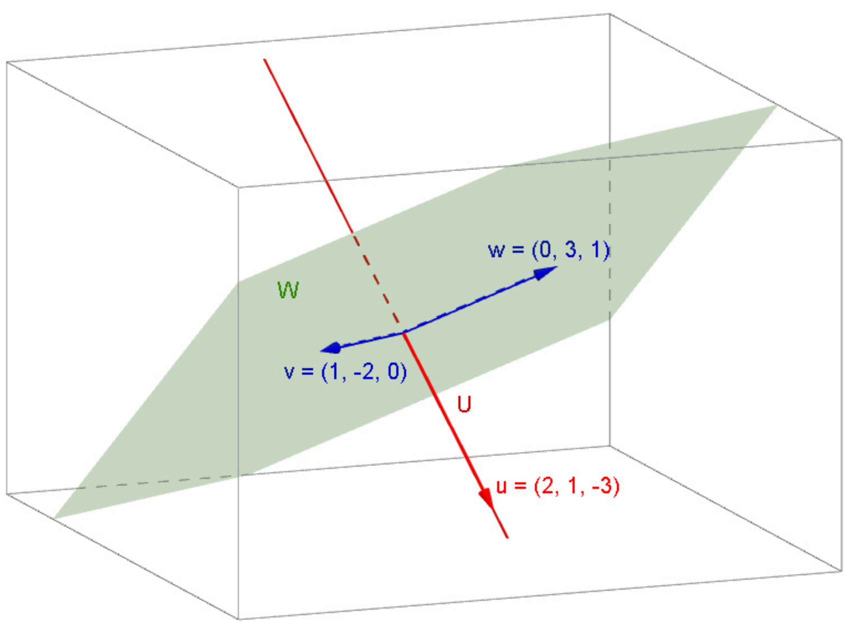
Potom je, jak již víme, W vektorovým podprostorem V_3,

$$W \subseteq\subseteq V_3.$$

Pokud budeme uvažovat také podprostor generovaný vektorem $\vec{u}$,

$$U = [\{(2, 1, -3))\}], \tag{73}$$

tvoří U, W dvojici vzájemně se ortogonálně doplňujících podprostorů vektorového



Obrázek 18: $U = [\{(2, 1, -3))\}], W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]$

prostoru V_3 (viz Obr. 18), značíme

$$U = W^{\perp}, \quad W = U^{\perp}$$

a čteme „podprostor U je ortogonálním doplňkem podprostoru W“, resp. „podprostor W je ortogonálním doplňkem podprostoru U“.

Poznámka. Ve vektorovém prostoru dimenze 3 je ortogonálním doplňkem roviny (přesněji vektorového prostoru dimenze 2) přímka na ní kolmá (vektorový prostor dimenze 1, jehož vektory jsou ortogonální se všemi vektory té roviny) a ortogonálním doplňkem přímky je naopak rovina.

Definice 21 (Ortogonální doplněk vektorového podprostoru)**.** *Ortogonálním doplňkem vektorového podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$ rozumíme množinu všech vektorů kolmých (ortogonálních) k V_k. Značíme $V_k^{\perp}$.*

Ortogonální doplněk vektorového podprostoru je vektorový prostor a jeho dimenze je $n - k$. Důkaz toho, že se jedná o vektorový prostor přenecháme čtenáři. Stačí na danou množinu uplatnit větu 10 (o určení vektorového podprostoru). Zde se zaměříme jenom na údaj o dimenzi $n - k$ podprostoru $V_k^{\perp}$.

Věta 23 (Dimenze ortogonálního doplňku)**.** *Je-li V_k podprostor vektorového prostoru V_n, je jeho ortogonální doplněk $V_k^{\perp}$ vektorový prostor dimenze $n - k$.*

Důkaz. Nechť $V_k = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k]$, kde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ je ortonormální báze. Potom pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in V_k^{\perp}$ musí platit $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = 0$; $i = 1, 2, \ldots, k$. Dostáváme tak homogenní soustavu k rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0, \end{aligned} \tag{74}$$

jejíž matice má hodnost k (její řádkové vektory $\vec{a}_i, i = 1, 2, \ldots, k$ jsou ortonormální, proto jsou dle věty 19 lineárně nezávislé). Z n neznámých je tedy k základních a $n-k$ volných. Proto musíme použít $n - k$ parametrů a množinou všech řešení soustavy, tj. ortogonálním doplňkem prostoru V_k, je tak vektorový prostor dimenze $n - k$. $\square$

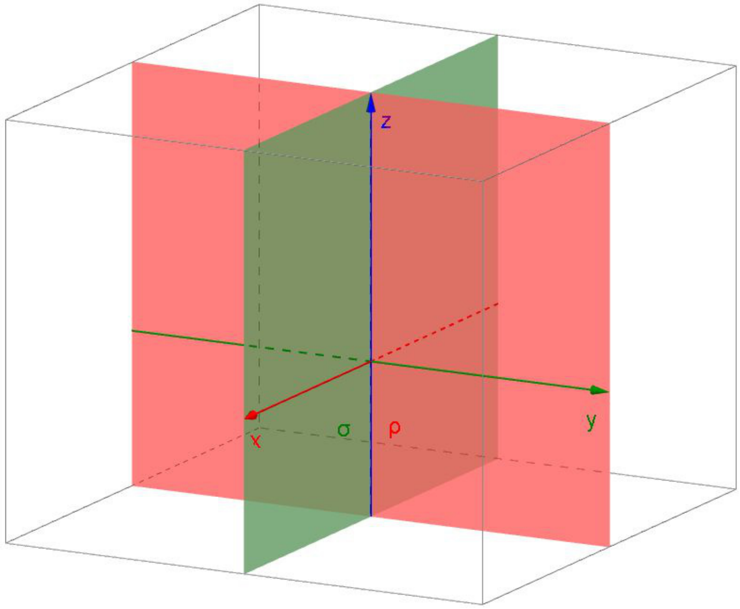
Poznámka. Z výše uvedeného vyplývá, že součet dimenzí dvou vektorových podprostorů prostoru V_n, které jsou vzájemně svými ortogonálními doplňky, je n. Tj. pro $V_r, V_s \subseteq\subseteq V_n$, kde $V_r = V_s^{\perp}$ (a tedy také $V_s = V_r^{\perp}$), platí

$$r + s = n.$$

Jak bylo uvedeno již v poznámce na straně 70, rozlišujeme podprostory *kolmé* ($V_r \perp V_s$) a podprostory*totálně kolmé* ($V_r = V_s^{\perp}$ a $V_s = V_r^{\perp}$). Přitom prostory totálně kolmé jsou zároveň i kolmé, avšak naopak to neplatí. Ne každé kolmé prostory jsou zároveň také totálně kolmé.

PŘÍKLAD 9.4. *Uveďte příklad vektorových podprostorů, které jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé.*

Řešení: Například dvě na sebe kolmé roviny $\rho : x = 0$ a $\sigma : y = 0$ v prostoru V_3 jsou *kolmé*, ale nejsou *totálně kolmé* (součet jejich dimenzí je 4, tj. větší než dimenze „mateřského“ prostoru V_3), viz Obr. 19.

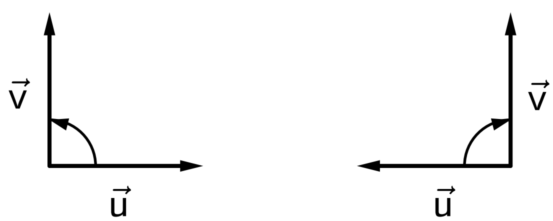


Obrázek 19: Roviny $\rho : x = 0$, $\sigma : y = 0$ jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé

10 Orientace báze vektorového prostoru

Rozlišujeme *pravotočivou* (též *kladnou*) a *levotočivou* (též *zápornou*) bázi vektorového prostoru.

Uvažujme bázi (pro jednoduchost ortonormální) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ prostoru V_2. Jak vidíme na



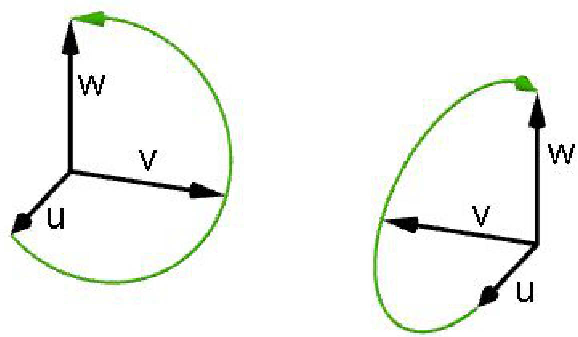
Obrázek 20: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_2

Obr. 20, vektory $\vec{u}, \vec{v}$ můžeme v rovině uspořádat dvěma způsoby, pro které je typické, že chceme-li přejít od jednoho k druhému, nestačí nám vektory pootočit, musíme použít osovou souměrnost. Podle smyslu přechodu od vektoru $\vec{u}$ k vektoru $\vec{v}$ označujeme tyto konfigurace vektorů i jimi tvořené báze jako *pravotočivou* (kladný smysl, Obr. 20, vlevo), respektive *levotočivou* (záporný smysl, Obr. 20, vpravo). Pro pravotočivé báze používáme též označení *kladné báze*, pro levotočivé pak *záporné báze*.

Stejně rozdělujeme báze v trojrozměrném prostoru[1]. Uvažujme bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ vektorového prostoru V_3. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ můžeme opět uspořádat dvěma způsoby, mezi kterými nelze přejít pouhým otočením, ale musíme použít souměrnost podle roviny.

[1]Pojem orientace báze a vektorového prostoru se dá samozřejmě zavést obecně pro vektorové prostory dimenze n, viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 105–107

Konfiguraci, v níž při přechodu mezi vektory v pořadí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ postupujeme v klad-



Obrázek 21: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_3

ném smyslu, nazýváme *pravotočivou* (též *kladnou*) bází (Obr. 21, vlevo), konfiguraci, v níž postupujeme v záporném smyslu, nazýváme *levotočivou* (též *zápornou*) bází (Obr. 21, vpravo).

Vektorový prostor, v němž používáme takto orientované báze, nazýváme *orientovaný vektorový prostor*.

10.1 Matice přechodu mezi dvěma bázemi

Máme-li ve vektorovém prostoru zavedeny dvě báze, můžeme souřadnice vektoru vzhledem k jedné z nich převést na souřadnice tohoto vektoru vzhledem k druhé z nich pomocí tzv. *matice přechodu mezi bázemi*, jak ukazuje následující příklad 10.1.

Každá matice přechodu mezi dvěma bázemi je regulární (proč?) a tak je její determinant různý od nuly. Pokud je kladný, jsou příslušné báze stejně orientované (tj. obě jsou kladné, nebo jsou obě záporné), pokud je determinant matice přechodu záporný, jsou příslušné báze opačně orientované (tj. jedna je kladná a druhá je záporná).

PŘÍKLAD 10.1. *Vektor $\vec{u} \in V_2$ je dán souřadnicemi $\vec{u}_B = (u'_1, u'_2)$ vzhledem k bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_A = (u_1, u_2)$ vzhledem k bázi $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.*

Řešení: Vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ báze B samozřejmě patří do vektorového prostoru V_2, můžeme je proto vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ báze A

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2, \\ \vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2. \end{aligned} \tag{75}$$

Pokud soustavu (75) napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{bmatrix}, \tag{76}$$

figuruje v něm tzv. *matice přechodu of báze A k bázi B*

$$P(A,B)=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Vektor $\vec{u}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů obou daných bází

$$\vec{u}=u_1\vec{a}_1+u_2\vec{a}_2=u_1'\vec{b}_1+u_2'\vec{b}_2$$

a za vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$ dosadíme výrazy z rovnic (75)

$$u_1\vec{a}_1+u_2\vec{a}_2=u_1'(p_{11}\vec{a}_1+p_{12}\vec{a}_2)+u_2'(p_{21}\vec{a}_1+p_{22}\vec{a}_2).$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$u_1\vec{a}_1+u_2\vec{a}_2=(u_1'p_{11}+u_2'p_{21})\vec{a}_1+(u_1'p_{12}+u_2'p_{22})\vec{a}_2,$$

v níž porovnáme sobě odpovídající koeficienty u vektorů $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ na levé a pravé straně. Výslednou soustavu

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_1'p_{11}+u_2'p_{21} \\ \vec{u}_2 &= u_1'p_{12}+u_2'p_{22} \end{aligned}$$

potom můžeme zapsat maticovou rovnicí, v níž figuruje *matice přechodu od báze A k bázi B* (77)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1' & u_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \tag{78}$$

nebo schematicky pomocí daných vektorů

$$\vec{u}_A=\vec{u}_B\cdot P(A,B). \tag{79}$$

PŘÍKLAD 10.2. *Vektor $\vec{u}$ má vzhledem k bázi $M=\{\vec{m}_1,\vec{m}_2,\vec{m}_3\}$ vektorového prostoru V_3 souřadnice $\vec{u}_M=(2,1,-3)$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_N$ vzhledem k bázi $N=\{\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}$, jestliže platí: $\vec{m}_1=4\vec{n}_1-2\vec{n}_2-\vec{n}_3$, $\vec{m}_2=-3\vec{n}_1+\vec{n}_2+2\vec{n}_3$, $\vec{m}_3=-2\vec{n}_1-3\vec{n}_2+11\vec{n}_3$.*

Řešení: Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \vec{m}_1 &= 4\vec{n}_1-2\vec{n}_2-\vec{n}_3, \\ \vec{m}_2 &= -3\vec{n}_1+\vec{n}_2+2\vec{n}_3, \\ \vec{m}_3 &= -2\vec{n}_1-3\vec{n}_2+11\vec{n}_3 \end{aligned}$$

získáme matici přechodu od báze N k bázi M

$$P(N,M)=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix},$$

kterou dle (79) vynásobíme zprava vektor $\vec{u}_M = (2,1,-3)$, abychom dostali hledané souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi N

$$\vec{u}_N = (2,1,-3) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix} = (11, 6, -34).$$

PŘÍKLAD 10.3. *Najděte matici přechodu od báze M k bázi N a naopak, od N k M, jestliže $M = \{(1,1),(0,2)\}$, $N = \{(2,1),(1,2)\}$.*

Řešení: Podle (76) můžeme psát $N = P(M,N) \cdot M$. Po dosazení za M a N tak dostaneme maticovou rovnici $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P(M,N) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, jejímž řešením je matice $P(M,N) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Protože pro matici $P(N,M)$ platí podle (76) rovnice $M = P(N,M) \cdot N$, je zřejmé, že $P(N,M) = P(M,N)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 10.4. *Najděte matice přechodu mezi uvedenými (ortonormálními) bázemi $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ vektorového prostoru V_2.*
a) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

b) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

Řešení:
ad a) $P(E,F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F,E) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

ad b) $P(E,F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F,E) = P(E,F)$.

Poznámka. Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je ortogonální. Její determinant je roven 1 (příslušné báze jsou souhlasné) nebo -1 (příslušné báze jsou nesouhlasné).