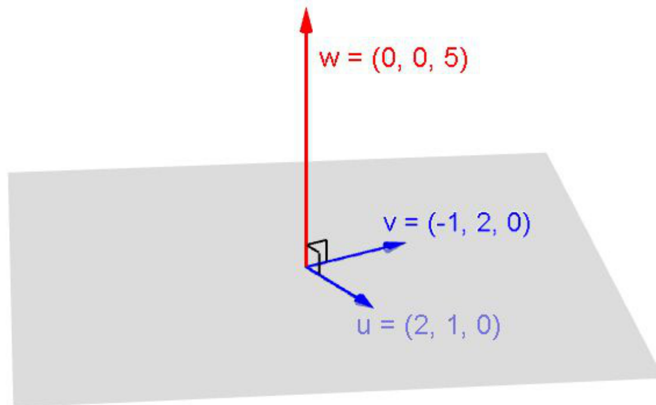
11 Vektorový součin

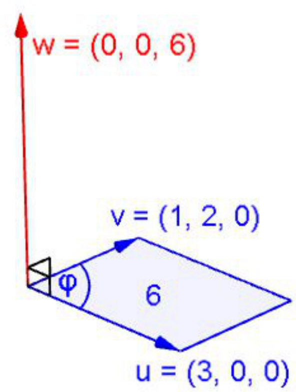
Vektorový součin je operace definovaná ve vektorovém prostoru dimenze 3, do které vstupují dva vektory (tj. binární operace) a jejímž výsledkem je vektor na tyto dva vektory kolmý (viz Obr. 22). Vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ zapisujeme $\vec{u} \times \vec{v}$. Výsledný vektor též nazýváme *vektorový součin*. Zobecněním vektorového součinu



Obrázek 22: Vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

pro prostory dimenze n je tzv. *ortogonální doplněk n-1 vektorů*, operace, do níž vstupuje $n-1$ vektorů a jejímž výsledkem je jeden vektor na všechny tyto vektory kolmý.

Formuli pro výpočet souřadnic vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ odvodíme na základě následujících tří požadovaných vlastností výsledného vektoru (viz Obr. 23):



Obrázek 23: $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\varphi$

i. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý (ortogonální) k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0, \tag{80}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0. \tag{81}$$

ii. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoří spolu s nezávislými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pravotočivou bázi.

iii. Velikost (norma) vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi. \tag{82}$$

Nejprve si uvědomíme, jaké důsledky plynou z uvedených vlastností pro *pravotočivou ortonormální bázi* vektorového prostoru V_3. Uvažujme například *kanonickou bázi* a označme si její vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Protože jsou tyto vektory (i) na sebe kolmé, (ii) tvoří pro nezávislé $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pravotočivou bázi a (iii) obsah rovnoběžníku (čtverce) vymezeného každými dvěma z nich je 1, je zřejmé, že platí:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \tag{83}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \tag{84}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, \ \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}. \tag{85}$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ nyní vyjádříme pomocí vektorů této ortonormální báze

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}, \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},$$

zapíšeme jejich vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}),$$

který za předpokladu platnosti příslušného distributivního zákona roznásobíme

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} = & u_1v_1\vec{i} \times \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \times \vec{j} + u_1v_3\vec{i} \times \vec{k} + \\ & + u_2v_1\vec{j} \times \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \times \vec{j} + u_2v_3\vec{j} \times \vec{k} + \\ & + u_3v_1\vec{k} \times \vec{i} + u_3v_2\vec{k} \times \vec{j} + u_3v_3\vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

a s použitím vztahů (83), (84), (85) zjednodušíme na tvar

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}. \tag{86}$$

Z (86) vyplývá, že vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor, říkejme mu třeba $\vec{w}$, jehož souřadnice vypočítáme ze souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ takto

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{87}$$

Nyní si ověříme, že vektor $\vec{w}$ definovaný (87) skutečně splňuje ony tři výše uvedené požadavky i–iii.

ad i) Ověříme splnění podmínek ortogonálnosti vektorů $\vec{w}$ a $\vec{u}$, resp. $\vec{w}$ a $\vec{v}$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 + u_3v_1u_2 - u_1v_3u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 = 0.$$

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = u_2v_3v_1 - u_3v_2v_1 + u_3v_1v_2 - u_1v_3v_2 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 = 0.$$

ad ii) Pro ověření, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ tvoří kladnou bázi dosadíme za $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vektory kanonické báze $\vec{i} = (1,0,0)$ a $\vec{j} = (0,1,0)$. Podle (87) je potom $\vec{i}\times\vec{j} = (0,0,1) = \vec{k}$. Vektorový součin skutečně tvoří spolu s danými dvěma vektory kladnou bázi.

ad iii) To, že vektor $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ definovaný vztahem (87) má normu $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi$, prokážeme dosazením souřadnic příslušných vektorů. Před tím však ještě obě strany této rovnosti umocníme na druhou

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\varphi,$$

a vhodnou úpravou s využitím vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů se zbavíme goniometrické funkce sin

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\varphi),$$
$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\varphi,$$
$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2. \tag{88}$$

Únavné výpočty při dosazení souřadnic vektorů do poslední rovnosti a ověření její platnosti provedeme v programu wxMaxima.
Nejprve načteme balíček funkcí „vect“ pro počítání s vektory a zadáme souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (vektorový součin je v Maximě reprezentován symbolem $\sim$, výsledek, jak vidíme, odpovídá formuli (87))

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) u:[u1,u2,u3]; v:[v1,v2,v3]; w:express(u~v);
```

(%o2) $[u1, u2, u3]$
(%o3) $[v1, v2, v3]$
(%o4) $[u2\,v3 - u3\,v2, u3\,v1 - u1\,v3, u1\,v2 - u2\,v1]$

Poté zapíšeme vztah (88) a odečtením porovnáme její levou a pravou stranu.

```
(%i5) Rovnice:(w.w)=(u.u)*(v.v)-(u.v)^2;
```

(%o5) $(u2\,v3 - u3\,v2)^2 + (u3\,v1 - u1\,v3)^2 + (u1\,v2 - u2\,v1)^2 = \left(u3^2 + u2^2 + u1^2\right)\left(v3^2 + v2^2 + v1^2\right) - (u3\,v3 + u2\,v2 + u1\,v1)^2$

```
(%i6) expand(lhs(Rovnice)-rhs(Rovnice));
```

(%o6) 0

Výsledek 0 znamená, že se obě strany (88) rovnají. Platnost vztahu (82) pro vektor $\vec{w}$ definovaný formulí (87) je tím prokázána.

11.1 Výpočet vektorového součinu

Víme, že vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor, jehož souřadnice jsou dány vztahem (viz též (87))

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{89}$$

Není však nutné si tento vztah pamatovat a souřadnice vektorového součinu počítat dosazením do něj. Ukážeme si zde některé jednodušší způsoby jejich výpočtu. Začneme tím, že si všimneme, že výrazy pro jednotlivé souřadnice vektorového součinu v (89) se dají zapsat ve formě determinantů matic řádu 2, které obsahují souřadnice daných vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{90}$$

Po rozepsání pomocí vektorů kanonické báze dostaneme rovnost

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \tag{91}$$

jejíž pravou stranu můžeme interpretovat jako rozvoj determinantu $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$ podle posledního řádku. Zápis vektorového součinu vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve formě tohoto determinantu se snáze pamatuje a přináší i podstatné zjednodušení výpočtu jeho souřadnic

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}. \tag{92}$$

Buď pracujeme přímo s determinantem (92), nebo využijeme některý odvozený algoritmus. Jako například ten následující. Souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ napíšeme pod sebe jako řádky matice (není nutné psát závorky), za kterou ještě připíšeme její první dva sloupce

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \tag{93}$$

V tomto schématu potom postupně na vybrané dvojice sloupců (2. a 3., 3. a 4., 4. a 5.) uplatňujeme *křížové pravidlo* a počítáme souřadnice vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{array}{c|cc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_2v_3 - u_3v_2,$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_3v_1 - u_1v_3,$$

$$\begin{array}{ccc|cc|} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_1v_2 - u_2v_1.$$

11.2 Vlastnosti vektorového součinu

Většinu vlastností vektorového součinu již známe. Zde si je souhrnně zopakujeme a přidáme několik dalších.

(1) Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$; $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$.

(2) Nezávislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvoří spolu s vektorovým součinem $\vec{u} \times \vec{v}$ pravotočivou[1] (kladnou) bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$. Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ závislé, je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.

(3) Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ není komutativní; $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

(4) Distributivnost vzhledem ke sčítání vektorů; $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

(5) Asociativnost vzhledem k násobení skalárem; $(c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v}) = c(\vec{u} \times \vec{v})$

(6) Velikost (norma) vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$;

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\varphi. \tag{94}$$

Dle (88) platí pro druhou mocninu normy vektorového součinu

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}, \tag{95}$$

kde $\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je tzv. *Gramův determinant* vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Vztah $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je potom speciálním případem tzv. *Lagrangeovy identity*[2]

11.3 Užití vektorového součinu

S různými aplikacemi vektorového součinu se budeme setkávat v dalších partiích této publikace. Zde si uvedeme dva příklady - výpočet obecné rovnice roviny dané jedním bodem a dvěma nezávislými vektory a výpočet obsahu trojúhelníku daného souřadnicemi jeho vrcholů.

PŘÍKLAD 11.1. *Rovina ρ je dána bodem $A = [-3, 2, 1]$ a dvěma nezávislými vektory $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ a $\vec{v} = (-1, -3, 2)$, určete její obecnou rovnici.*

[1] Tato skutečnost nám dovoluje určit směr vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ pomocí *pravidla pravé ruky*: Pravou ruku umístíme malíkovou hranou do roviny vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ tak, aby směr prstů odpovídal pořadí, v němž je násobíme (v případě $\vec{u} \times \vec{v}$ směřují od $\vec{u}$ k $\vec{v}$), potom má vztyčený palec směr vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$.

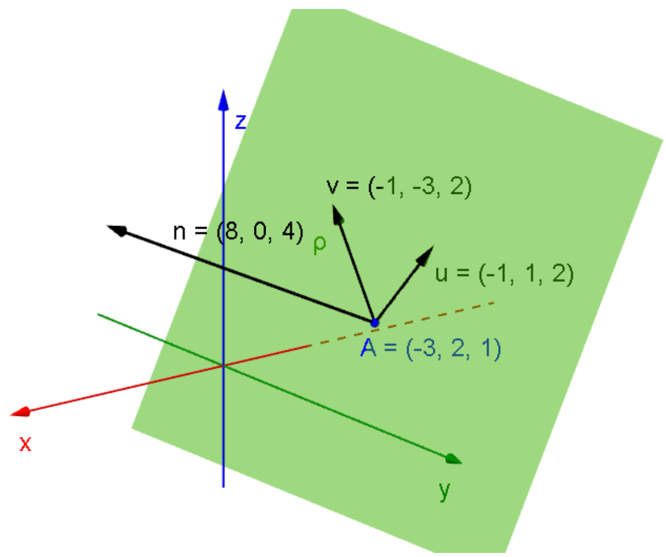
[2] Viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 114–115.

Řešení: Obecná rovnice roviny má tvar $ax + by + cz + d = 0$, kde (a, b, c) jsou souřadnice vektoru kolmého k této rovině, říkáme mu normálový vektor a značíme ho $\vec{n}$. K vyřešení příkladu tak stačí najít jakýkoliv normálový vektor roviny ρ, použít jeho souřadnice jako koeficienty a, b, c v obecné rovnici $\rho: ax + by + cz + d = 0$, dosadit za x, y, z souřadnice bodu A a dopočítat hodnotu koeficientu d.

Vzhledem k vlastnostem vektorového součinu použijeme jako normálový vektor roviny ρ vektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, 3) \times (7, -1, 2) = (8, 0, 4).$$

(viz Obr. 24). Rovina ρ je tedy dána rovnicí ve tvaru $8x + 4z + d = 0$, kde d



Obrázek 24: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (8, 0, 4)$

dopočítáme po dosazení souřadnic A. Z příslušné rovnice $8 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + d = 0$ dostáváme $d = 20$. Odpovídající rovnici $8x + 4z + 20 = 0$ potom můžeme ještě vydělit 4 a dostaneme základní tvar obecné rovnice roviny $\rho: 2x + z + 5 = 0$.

Poznámka. U normálového vektoru nám jde o jeho směr, nikoliv velikost. Proto jsme mohli dělit 4 již souřadnice vektoru $\vec{u} \times \vec{v} = (8, 0, 4)$ a nadále pracovat s vektorem $\vec{n} = (2, 0, 1)$.

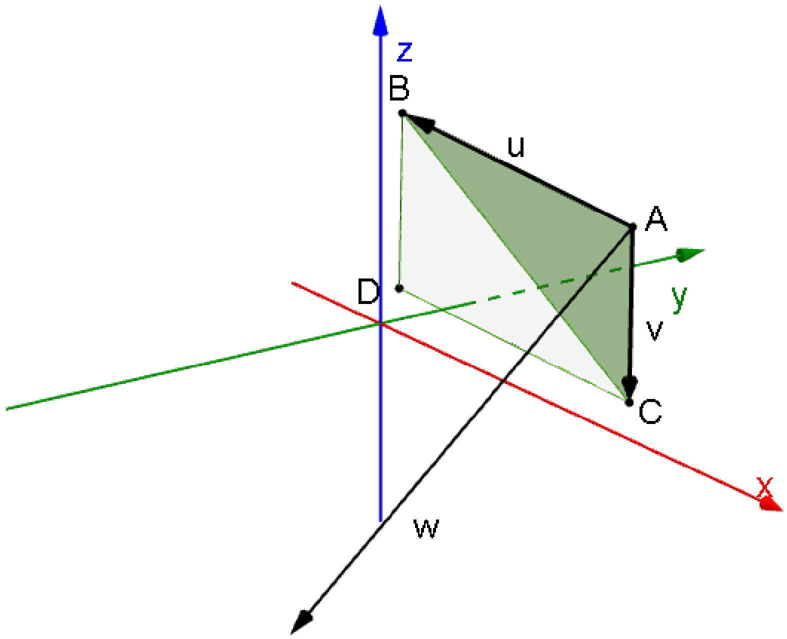
PŘÍKLAD 11.2. *Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC s vrcholy $A = [7, 3, 4]$, $B = [1, 0, 6]$, $C = [4, 5, -2]$.*

Řešení: Velikost (norma) vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku, který je vymezen vektory $\vec{u}, \vec{v}$

$$S_{\Diamond} = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Potom obsah trojúhelníku ABC spočítáme jako polovinu velikosti vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$ (viz Obr. 25)

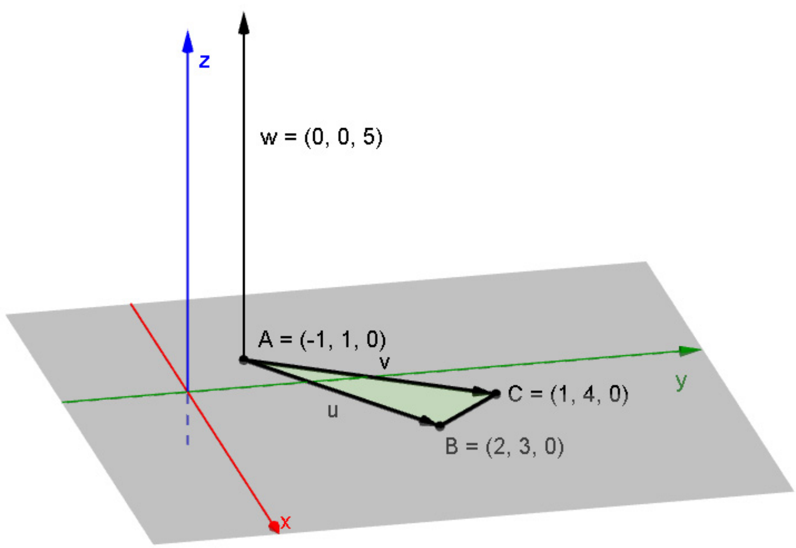
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|(-6, -3, 2) \times (-3, 2, -6)| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = 24,5.$$



Obrázek 25: Obsah trojúhelníku ABC je roven $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

PŘÍKLAD 11.3. *Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC;* $A = [-1, 1], B = [2, 3], C = [1, 4]$.

Řešení: Pro řešení tohoto úkolu je nejsnazší použít *vnější součin* (též *smíšený součin*), jak uvidíme v kapitole 12. Výpočet pomocí vektorového součinu však není nijak obtížný a navíc se ukáže, že oba postupy spolu souvisejí. Rovinu, v níž se nachází



Obrázek 26: Obsah trojúhelníku ABC je roven $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

daný trojúhelník jednoduše chápeme jako podprostor bodového prostoru dimenze 3. Tento přechod do prostoru vyšší dimenze nejjednodušeji vyřešíme tak, že rovinu ABC ztotožníme se souřadnicovou rovinou xy, tj. souřadnice daných bodů změníme z uspořádaných dvojic na trojice přidáním 0 jako třetí složky; $A = [-1, 1, 0], B =$

$[2,3,0], C=[1,4,0]$ (viz Obr. 26). Potom k výpočtu obsahu trojúhelníku ABC použijeme vektorový součin stejně jako při řešení příkladu 11.2. Obsah trojúhelníku ABC vyjde $2,5$.

11.4 Ortogonální doplněk *n-1* vektorů v prostoru V_n

Zobecněním vektorového součinu do prostoru V_n je *ortogonální doplněk* $n-1$ *vektorů*. Tímto pojmem rozumíme *jeden vektor*, který je kolmý ke všem daným $n-1$ vektorům z V_n. Vektorový součin bychom tedy mohli nazývat také *ortogonální doplněk 2 vektorů* v prostoru V_3.

K zobecnění vektorového součinu do prostoru dimenze n použijeme jeho zápis (92) ve formě determinantu.

Definice 22 (Ortogonální doplněk n-1 vektorů)**.** *Ortogonálním doplňkem* $n-1$ *vektorů* $\vec{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}), i=1,2,\ldots,n-1$, *jejichž souřadnice jsou udány vzhledem k ortonormální bázi* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ *vektorového prostoru* V_n, *nazýváme vektor, který je výsledkem rozvoje determinantu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{vmatrix} \tag{96}$$

podle $n-$*tého řádku. Značíme ho*

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2\times\ldots\times\vec{a}_{n-1}.$$

Poznámka. Podle definice 22 a podle věty o rozvoji determinantu[1] pro ortogonální doplněk $n-1$ vektorů $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ platí

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2\times\ldots\times\vec{a}_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{vmatrix}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+\ldots+A_n\vec{e}_n.$$

Potom ale můžeme říci, že ortogonální doplněk uvedených $n-1$ vektorů je vektor, jehož složkami jsou algebraické doplňky prvků posledního řádku determinantu (96)

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2\times\ldots\times\vec{a}_{n-1}=(A_1,A_2,\ldots,A_n)\,.$$

[1] Dle věty o rozvoji determinantu je $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{jk}=\delta_{ij}\cdot\det A,\ i,j=1,2,\ldots,n$, kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí, že $\delta_{ij}=1$ pro $i=j$ a $\delta_{ij}=0$ pro $i\neq j$.

11.5 Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů

Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů[1] jsou analogické vlastnostem vektorového součinu, které jsou uvedeny na straně 81.

(1) Ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}$ je kolmý k vektorům $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$.

(2) Pro vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}\}$ kladnou bázi V_n.

(3) Pro vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně závislé je $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = \vec{o}$.

(4) Prohozením pořadí dvou vektorů se ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}$ mění na opačný.

(5) $$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2^2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-2}\vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix} = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}),$$

kde $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1})$ je Gramův determinant.

[1] Více o těchto vlastnostech viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 106–111.