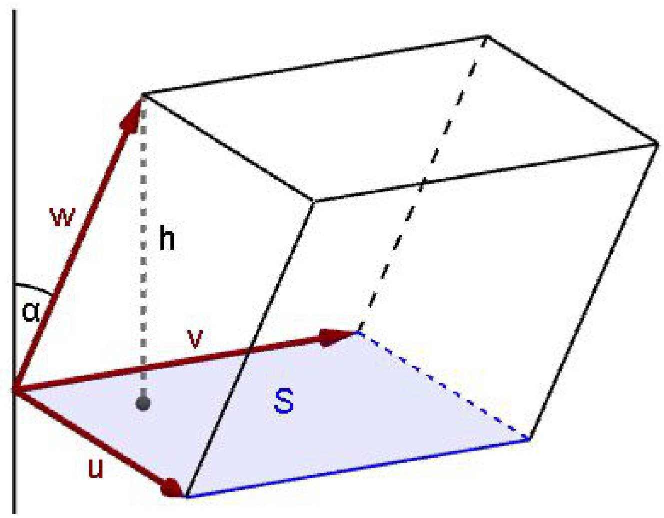
12 Vnější součin

Vnější součin, též *smíšený součin*, je ve vektorovém prostoru dimenze 3 operací, do které vstupují tři vektory (tj. ternární operace) a jejímž výsledkem je číslo. Absolutní hodnota tohoto čísla je přitom rovna objemu rovnoběžnostěnu vymezeného danými třemi vektory. Protože lze vnější součin v prostoru dimenze 3 interpretovat jako spojení vektorového a skalárního součinu, říká se mu též *smíšený součin*. Vnější součin lze zobecnit do vektorového prostoru dimenze n.

Vztah pro výpočet vnějšího součinu odvodíme jako řešení úkolu *vypočítat objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$*, viz Obr. 27. Je zřejmé, že objem V



Obrázek 27: Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

tohoto rovnoběžnostěnu je dán vztahem $V = S \cdot h$, kde $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ a $h = |\vec{w}| \cos \alpha$, tj.

$$V = S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha.$$

Protože podle (25) je $|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \varphi = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, můžeme objem uvažovaného rovnoběžnostěnu vyjádřit vztahem

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}. \tag{97}$$

Tento vztah, který nabízí vysvětlení, proč se vnějšímu součinu říká také *smíšený součin*, dále upravíme. Pokud za $\vec{u} \times \vec{v}$ dosadíme podle (90) a poté aplikujeme větu o rozvoji determinantu (viz poznámka pod čarou na str. 84), dostaneme postupně

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Vidíme tedy, že objem rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory na Obr. 27 je roven determinantu, jehož řádky tvoří tyto vektory. V obecném případě, kdy nemáme zaručeno, že úhel α je ostrý, uvažujeme absolutní hodnotu tohoto determinantu

$$V = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|. \tag{98}$$

Operaci, která třem vektorům $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, daným souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vzhledem k ortonormální bázi V_3, přiřadí hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{99}$$

případně výrazu

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}, \tag{100}$$

který je s ním ekvivalentní, nazýváme *vnější součin* (též *smíšený součin*) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, značíme

$$[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}].$$

12.1 Vlastnosti vnějšího součinu

(1) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}] = -[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$.

(2) Pro $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležící v jedné rovině (tj. *komplanární*) je $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$.

Uvedené vlastnosti lze snadno dokázat použitím zápisu vnějšího součinu ve formě determinantu

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

12.2 Užití vnějšího součinu

12.2.1 Objem rovnoběžnostěnu

PŘÍKLAD 12.1. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, jejichž souřadnice vyhledem ke kanonické bázi vektorového prostoru V_3 jsou $\vec{u} = (2, -1, 0)$,*

$\vec{v} = (3, 0, 2)$, $\vec{w} = (1, 1, 5)$.

Řešení: Dle (98) pro objem daného rovnboběžnostěnu platí

$$V = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right\| = 9. \tag{101}$$

12.2.2 Obsah rovnoběžníku/trojúhelníku v rovině

V řešení příkladů 11.2, 11.3 jsme si ukázali, jak lze k výpočtu obsahu rovnoběžníku či trojúhelníku využít vektorový součin, nejenom v prostoru dimenze 3, ale i v rovině. V případě roviny stačilo přidat jako třetí souřadnici nulu. Nyní si ukážeme, jak tento postup souvisí s *vnějším součinem*.

Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Pokud jejich souřadnice upravíme ne tvar $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ můžeme obsah rovnoběžníku, který je jimi určen, vyjádřit vztahem

$$S_\Diamond = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Protože pro vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ platí

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{array} \right| = (0, 0, \left| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right|),$$

je zřejmé, že obsah uvažovaného rovnoběžníku lze vyjádřit také ve tvaru

$$S_\Diamond = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left\| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right\|,$$

kde determinant $\left| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right|$ můžeme dle (99) chápat jako zápis vnějšího součinu $[\vec{u}\ \vec{v}]$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Potom ovšem můžeme psát

$$S_\Diamond = |[\vec{u}\ \vec{v}]|.$$

Pojem vnějšího součinu tak můžeme použít i v rovině, tj. pro dva vektory o dvou složkách. Jeho absolutní hodnotu potom interpretujeme jako obsah rovnoběžníku těmito vektory omezeného.

Pro obsah příslušného trojúhelníku pak platí

$$S_\triangle = \frac{1}{2} S_\Diamond = \frac{1}{2} |[\vec{u}\ \vec{v}]| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right\|.$$

Můžeme ovšem použít i zápis, v němž figurují přímo souřadnice bodů - vrcholů trojúhelníku, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ platí

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{array} \right\|. \tag{102}$$

Případně můžeme použít ekvivalentní tvar, v němž nefigurují rozdíly souřadnic daných bodů

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\|. \tag{103}$$

Analogické vyjádření bychom dostali i pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru dimenze 3. Dostáváme tak následující snadno zapamatovatelné vztahy:

(1) *Obsah rovnoběžníku určeného body* A, B, C

$A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$:

$$S = \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\|.$$

(2) *Objem rovnoběžnostěnu určeného body* A, B, C, D

$A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$:

$$V = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{array} \right\|.$$

PŘÍKLAD 12.2. *Vypočítejte obsah trojúhelníka* ABC, *je-li dáno:* $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.

Řešení: Použijeme (102) (můžeme ovšem použít také (103))

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right\| = 6.$$

12.2.3 Rovnice roviny určené třemi body A, B, C

Vnější součin můžeme využít k elegantnímu zápisu obecné rovnice roviny dané třemi nekolineárními body, například A, B, C (viz Obr. 28). Využijeme skutečnosti, že právě jenom pro bod X náležející rovině ABC je objem rovnoběžnostěnu určeného trojicí vektorů $B - A$, $C - A$, $X - A$ roven nule. Obecnou rovnici roviny ABC tak můžeme zapsat ve tvaru

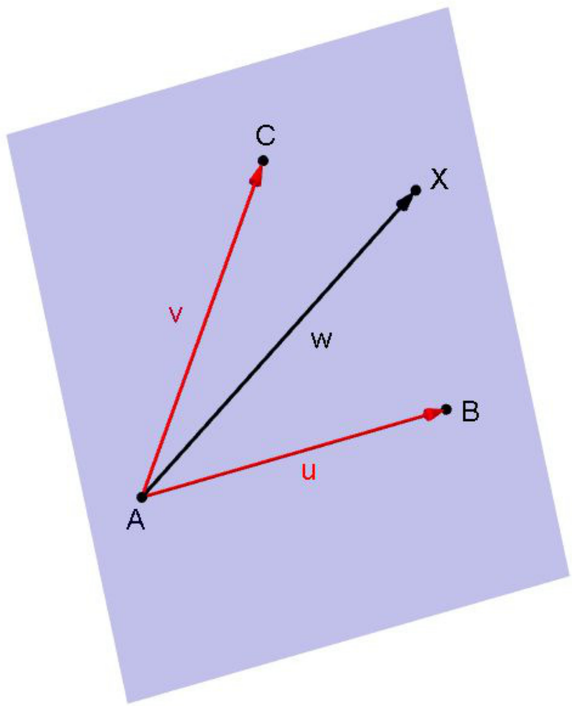
$$[(X - A)(B - A)(C - A)] = 0, \tag{104}$$

nebo pomocí determinantu obsahujícího souřadnice bodů X, A, B, C

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

případně souřadnice příslušných vektorů $X - A, B - A, C - A$

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Obrázek 28: Vektory $X - A, B - A, C - A$ jsou lineárně závislé

12.3 Vnější součin v prostoru V_n

Definice 23 (Vnější součin vektorů). *Vnějším součinem vektorů*[1] $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$, *které jsou dány souřadnicemi* $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = 1, 2, ..., n$, *vzhledem k ortonormální bázi, nazýváme determinant*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Značíme ho

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n].$$