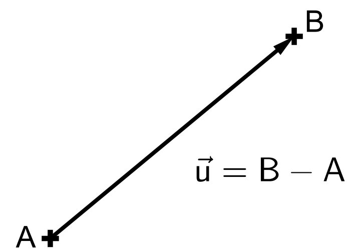
13 Afinní bodový prostor

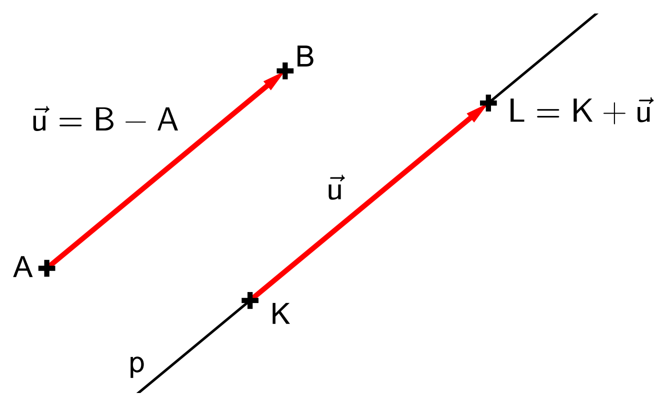
Pojem *afinní bodový prostor*[1] představuje zobecnění pojmů *rovina* (tj. dvojrozměrný bodový prostor) a *prostor* (tj. trojrozměrný bodový prostor), které známe z planimetrie, stereometrie a analytické geometrie.

Prvky afinního bodového prostoru nazýváme *body*. Klíčovou vlastností afinního bodového prostoru je, že každými dvěma jeho body je určen vektor, který je dán jejich rozdílem, viz Obr. 29.



Obrázek 29: Dvěma body A, B je určen vektor $\vec{u}$

Díky této vlastnosti můžeme vyjádřit bod v afinním bodovém prostoru jako součet jiného bodu a vektoru, viz Obr. 30.



Obrázek 30: Součtem bodu K a vektoru $\vec{u}$ je bod L

Uvedené skutečnosti nám dovolují zavést v afinním bodovém prostoru souřadnice, popisovat jeho podmnožiny a zkoumat vztahy[2] mezi nimi. Těmto otázkám se budeme podrobně věnovat v následujících partiích textu. Zde si jenom pro příklad uveďme *parametrickou rovnici přímky*, jejíž zavedení přímo vyplývá z popisované souvislosti mezi dvojicí bodů a vektorem.

Uvažujme přímku p z Obr. 30, která je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{u}$. Stejně jako jsme zapsali bod L součtem $L + \vec{u}$, můžeme vyjádřit každý bod X

[1] *Affinis* znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil *Leonhard Euler* (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělící poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. *Afinní geometrií* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

[2] V prostém afinním bodovém prostoru neumíme měřit vzdálenosti a úhly. To je umožněno až zavedením skalárního součinu v příslušném vektorovém prostoru (říkáme mu *zaměření* bodového prostoru). Potom hovoříme o *Eukleidovském bodovém prostoru*.

přímky p součtem $L + \vec{x}$, kde $\vec{x} = t\vec{u}$, $t \in R$. Tak dostáváme *parametrickou rovnici* (též *parametrické vyjádření*) *přímky* p:

$$X = K + t\vec{u};\ t \in R. \tag{105}$$

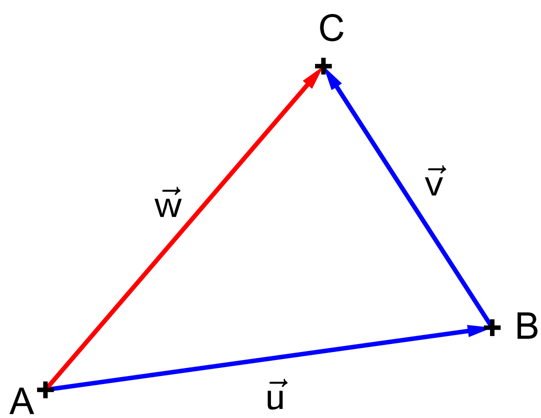
13.1 Definice afinního bodového prostoru

Skutečnost, že každými dvěma body je určen vektor, nám umožňuje při definici afinního bodového prostoru využít axiomů definujících vektorový prostor.

Přiřazení vektoru $\vec{u}$ z prostoru V_n dvojici bodů A, B z afinního bodového prostoru A_n popíšeme pomocí zobrazení $g : A_n \times A_n \to V$, kde

$$g(A, B) = \vec{u} = B - A. \tag{106}$$

V souvislosti se zobrazením (106) se v afinním bodovém prostoru setkáme se dvěma „novými" operacemi: (i) *Odčítání bodů*, jehož výsledkem je vektor, $\vec{u} = B - A$. (ii) *Sčítání bodu a vektoru*, jehož výsledkem je bod, $B = A + \vec{u}$.



Obrázek 31: $(B - A) + (C - B) = (C - A)$

Při definování afinního bodového prostoru požadujeme, aby zobrazení (106) mělo s ohledem na uvedené operace vlastnost, kterou ilustruje Obr. 31. Pro trojúhelník ABC platí $B - A = \vec{u}$, $C - B = \vec{v}$, $C - A = \vec{w}$, $A + \vec{u} = B$, $B + \vec{v} = C$, $A + \vec{w} = C$. Potom můžeme psát

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{w} = C.$$

Pro vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ by tak měla platit rovnost $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, kterou můžeme přepsat pomocí zobrazení (106) takto

$$g(A, B) + g(B, C) = g(A, C).$$

Jedná se o tzv. *Chaslesův vztah* a jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru[1].

[1]Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 15.

Definice 24 (Afinní bodový prostor). *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení $g: \ A_n \times A_n \to V$ těchto vlastností:*

1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{(též zapisujeme jako } B - A = \vec{x}\text{)}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme (vektorovým) zaměřením afinního bodového prostoru A_n.

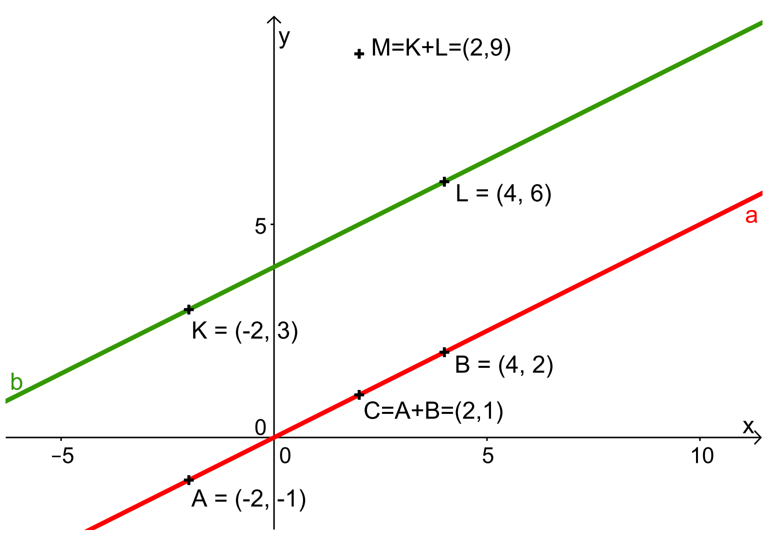
Příklady afinního bodového prostoru

(1) *Bod*, tj. jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$, je *afinní bodový prostor dimenze 0.*

(2) *Přímka* je *afinním bodovým prostorem dimenze 1* se zaměřením $V_1 = [\vec{u}]$, kde $\vec{u}$ je jejím směrovým vektorem.

(3) *Vektorový prostor V_n je afinním bodovým prostorem dimenze n*. Zobrazení (106) je v tomto případě definováno vztahem $g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$.

Poznámka. Možná překvapivá informace v příkladu (3), že vektorový prostor je zároveň i afinním bodovým prostorem, vychází ze skutečnosti, že vektorový prostor automaticky splňuje definici 24 (Vyzkoušejte!). Obráceně to však neplatí! Nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem. Jak ilustruje Obr. 32, na němž jsou znázorněny dvě přímky a a b, které jsou obě afinními bodovými



Obrázek 32: $C = A + B \in a$, $M = K + L \notin b$

(pod)prostory. Přitom jenom přímka a je zároveň i vektorovým (pod)prostorem.

Vidíme, že přímka b neobsahuje nulový vektor (tj. bod $[0,0]$, viz *nutná podmínka existence vektorového podprostoru* na str. 35), naplatí pro ni ani požadavek, že součet jejích prvků (bodů) je opět jejím prvkem (bodem) (viz definice 3 a věta 10).

Poznámky.
1. Afinní bodový prostor A_n zapisujeme také jako

$$A_n = (A, V_n, g),$$

kde A je množina bodů, V_n je vektorové zaměření vektorového prostoru a g je zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$.

2. Afinní bodový prostor A_n nazýváme plným jménem „afinní bodový prostor nad tělesem T," kde T odpovídá tělesu, nad nímž je definováno zaměření V_n.

PŘÍKLAD 13.1. *Rozhodněte, zda je množina (P, V, g) s níže uvedenými specifikacemi afinním bodovým prostorem.*
a) $P = R^3,\ V = \{(x_1, x_2, x_3); x_1, x_2, x_3 \in R\},\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3),$
b) $P = R^3,\ V = \{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in R\},\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, 0).$

Řešení:
ad a) Jedná se o afinní bodový prostor.

ad b) Nejedná se o afinní bodový prostor. Problém je s vektorovým prostorem V. Z definice 24 není splněn požadavek „Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že $g(A, B) = \vec{x}$". Například pro bod $A = (2, 3, 7)$ a vektor $\vec{x} = (1, 2, 0)$ existuje nekonečně mnoho bodů $B = (3, 5, k), k \in R$, pro které je $\vec{x} = B - A$.

PŘÍKLAD 13.2. *Označme M množinu všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ a W_A vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = o$. Dokažte, že množina M je afinním bodovým prostorem se zaměřením W_A.*

Řešení: Nejprve definujeme zobrazení $g: M \times M \to W_A$. Pro $x_1, x_2 \in M$ zřejmě platí $Ax_1 = b$ a $Ax_2 = b$. Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme $A(x_2 - x_1) = \vec{o}$, tj. $u = x_2 - x_1 \in W_A$. Zobrazení g tak můžeme definovat vztahem $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Ověření, že (M, W_A, g) splňuje definici 24 a je tedy afinním bodovým prostorem přenecháváme čtenáři, postup je zřejmý.