Seznam otázek ke zkoušce z Lineární algebry a geometrie ... KMA/LAG

1.	**I. Vektorový prostor.** Uveďte několik příkladů vektorových prostorů. Vyslovte definici vektorového prostoru. Jednotlivé vlastnosti z definice ilustrujte na vybraném příkladu. Které z následujících množin splňují definici vektorového prostoru (vysvětlete proč): a) $M_1 = \{(x,y) \in R^2; y = -2x+1\}$, b) $M_2 = \{(x,y) \in R^2; y = 5x\}$, c) $M_3 = \{(0,0,0)\}$? **II. Lineární kombinace.** Na jednoduchém příkladu objasněte pojmy lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární obal množiny a množina generátorů vektorového prostoru. Uveďte příklady množin generátorů vektorových prostorů R^2, R^3, R^4, které nejsou jejich bázemi, a správnost těchto příkladů dokažte.
2.	**I. Lineární závislost a nezávislost vektorů.** Definujte pojmy „lineárně závislé vektory“ a „lineárně nezávislé vektory“. Uveďte příklady. Vysvětlete, proč je následující tvrzení pravdivé, ilustrujte ho jednoduchým příkladem: „Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru *V*. Pokud množina *M* obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá.“ **II. Dimenze a báze vektorového prostoru.** Definujte pojem báze vektorového prostoru. Jaký je vztah mezi bází a množinou generátorů vektorového prostoru? Kolika způsoby můžeme zapsat daný vektor pomocí vektorů dané báze příslušného vektorového prostoru? Svou odpověď dokažte. Co rozumíme pojmem dimenze vektorového prostoru? Uveďte příklady množin generátorů a bází vektorových prostorů R^2, R^3, R^4.
3.	**I. Steinitzova věta.** Vyslovte Steinitzovu větu o výměně. Vyjmenujte alespoň tři důsledky této věty. S pomocí Steinitzovy věty o výměně dokažte následující dvě věty (Jejich smysl můžete ilustrovat jednoduchými příklady.): a) „Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru $V \neq \vec{o}$ mají týž počet prvků.“ b) „Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_m\}$ je množina generátorů vektorového prostoru *V*, pak $\dim V \leq m$.“ **II. Spojení a průnik podprostorů vektorového prostoru.** Vysvětlete pojmy průnik, sjednocení a spojení podprostorů vektorového prostoru. Ilustrujte význam těchto pojmů příkladem z prostoru R^2 nebo R^3. Jak určujeme dimenzi průniku dvou podprostorů?
4.	**I. Podprostor vektorového prostoru.** Definujte pojem podprostor vektorového prostoru. Uveďte všechny možné podprostory vektorových prostorů R^2 a R^3. Jaký je „největší“ a „nejmenší“ podprostor daného vektorového prostoru *V*? Jaká je nutná podmínka existence vektorového (pod)prostoru? Rozhodněte, zda jsou uvedené množiny podprostory v R^3. Své tvrzení zdůvodněte. a) $W_1 = \{(r, 3r, 5r); r \in R\}$, b) $W_2 = \{(2s-t, s+t, s-2t); s, t \in R\}$, c) $W = \{(r+1, 3r, 5r); r \in R\}$. **II. Homomorfismus.** Definujte pojem homomorfismus (lineární zobrazení). Uveďte několik příkladů. Uveďte možnosti zadání homomorfismu a tyto možnosti ilustrujte příkladem. Vysvětlete pojmy jádro a obraz homomorfismu. Vzhledem k jakým prostorům jsou jádro a obraz homomorfismu podprostory? Jak určujeme jejich dimenzi? Kdy místo názvu homomorfismus používáme označení monomorfismus, epimorfismus či izomorfismus? Uveďte příklad navzájem izomorfních vektorových prostorů.

5.	**I. Skalární součin.** Vyslovte definici skalárního součinu. Uveďte několik příkladů skalárního součinu. Na příkladu libovolného skalárního součinu vysvětlete jednotlivé vlastnosti z definice této operace. Jak je definována norma vektoru? Jak vypočítáme odchylku dvou vektorů? Co platí pro skalární součin vektorů zadaných souřadnicemi vzhledem k nějaké ortonormální bázi? Jaké jsou další výhody ortonormální báze? **II. Ortogonální vektory.** Co rozumíme pojmem ortonormální báze? K čemu používáme Gram-Schmidtův ortogonalizační proces? Tuto metodu objasněte při řešení této úlohy: „Určete ortonormální bázi podprostoru W= [(1,2,-1),(0,1,1)].“
6.	**I. Afinní bodový prostor.** Uveďte příklady afinních bodových prostorů. Jak definujeme tento pojem? Jaký je rozdíl mezi afinním bodovým prostorem a vektorovým prostorem. Vysvětlete pojem afinní soustava souřadnic. Jak přejdeme od souřadnic vektoru k souřadnicím bodu? Vysvětlete rozdíl mezi A_3 a V_3. Které z následujících dvou tvrzení je pravdivé: a) „Vektorový prostor V_n je zároveň i afinním bodovým prostorem.“ b) „Afinní bodový prostor A_n je zároveň i vektorovým prostorem.“ **II. Afinní bodový podprostor.** Definujte pojem afinní bodový podprostor. Jaký je jeho vztah k vektorovému podprostoru? Uveďte některé speciální bodové podprostory. Jaké podprostory existují v A_2 *a* A_3? Jak můžeme tyto podprostory zadat? Ilustrujte na příkladech.
7.	**I. Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů.** Druhy zápisů afinních podprostorů a přechody mezi nimi (parametricky, užitím nadrovin). Kolik neparametrických rovnic nadrovin v A_n potřebujete k určení podprostoru dimenze k? Ilustrujte pomocí rovin a přímky v prostoru A_3. Jaké mohou být vzájemné polohy afinních podprostorů a jak tyto polohy určíme. Jak poznáme, že dva rovnoběžné podprostory jsou incidentní? **II. Určení afinního bodového podprostoru.** Jak byste dokázali pravdivost tvrzení: „Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen jednoznačně (k + 1) lineárně nezávislými body.“ Co to jsou lineárně nezávislé body? Vysvětlete na příkladu roviny v A_3. Jak byste dokázali, že je určena 3 nezávislými body?
8.	**I. Průnik a spojení bodových podprostorů.** Průnik dvou afinních bodových podprostorů. Jak poznáme, že není prázdný? Spojení dvou afinních bodových podprostorů. Určení spojení dvou afinních podprostorů? Jaký je vztah mezi dimenzí s spojení zaměření bodových podprostorů a dimenzí g spojení těchto podprostorů. Ilustrujte na příkladu přímky a roviny v prostoru A_3. **II. Diskuse vzájemné polohy dvou bodových podprostorů.** Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin. V prostoru jaké dimenze mohou být dvě roviny mimoběžné? Vysvětlete, co rozumíme příčkou mimoběžných podprostorů.
9.	**I. Neparametrická rovnice nadroviny.** Pojem neparametrická rovnice nadroviny ilustrujte na příkladu roviny v A_3. Uveďte alespoň čtyři různé postupy jejího odvození i s jejich případnou geometrickou interpretací. Jak určíte její neparametrickou rovnici, znáte-li tři body, dva body a vektor ze zaměření roviny, bod a dva vektory ze zaměření roviny? **II. Svazky a trsy nadrovin.** Svazek nadrovin, rovnice svazku, nakreslete svazky nadrovin v A_2, A_3. Trs nadrovin, rovnice trsu, nakreslete trsy nadrovin v A_2, A_3. Jak poznáme, o který trs nadrovin se jedná? Vymyslete si rovnice L_1, L_2, L_3 tří rovin a rozhodněte, zda náleží do téhož trsu či svazku. Pokud ano, jakého druhu?

10.	**I. Ortogonální doplněk vektorového podprostoru.** Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk podprostoru? Jaká je dimenze ortogonálního doplňku podprostoru V_k ve vektorovém prostoru V_n? Ilustrujte na příkladu V_3. Vysvětlete rozdíl mezi pojmy ortogonální doplněk podprostoru a ortogonální doplněk n-1 vektorů. **II. Ortogonální doplněk n-1 vektorů. Vektorový součin.** Definujte vektorový součin. Jaké jsou vlastnosti vektorového součinu? Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk n-1 vektorů? Na příkladu z A_3 ilustrujte použití vektorového součinu při výpočtu obsahu rovnoběžníku.
11.	**I. Kolmost podprostorů.** Jak určíme, zda je vektor kolmý k podprostoru? Vysvětlete souvislost a rozdíl v pojmech kolmé podprostory a totálně kolmé podprostory. Ilustrujte na příkladu podprostorů V_3. Jaká je nutná a postačující podmínka pro kolmost dvou podprostorů? Co to je ortogonální matice? **II. Euklidovský bodový prostor.** Kdy můžeme afinní bodový prostor nazvat Euklidovským bodovým prostorem? Co rozumíme pojmem kartézská soustava souřadnic? Jak definujeme vzdálenost bodů? Uveďte několik vlastností vzdálenosti bodů. Jak počítáme vzdálenost bodů v kartézské soustavě souřadnic? V prostoru A_2 zaveďte dvě různé kartézské soustavy souřadnic.
12.	**I. Vnější součin. Objem simplexu.** Vysvětlete geometrický význam vnějšího součinu v prostoru dimenze 3 a proveďte jeho odvození. Potom vyslovte obecnou definici pro prostor dimenze n. Co rozumíme pojmem simplex? Jak vypočítáme jeho objem? Uveďte příklad simplexu v E_3. Vypočtěte jeho objem. **II. Obsah trojúhelníku.** Uveďte různé postupy pro výpočet obsahu trojúhelníku. Jak přitom můžeme využít skalární, vektorový nebo vnější součin? Naznačte postup odvození Heronova vzorce.
13.	**I. Vzdálenost podprostorů.** Jak definujeme vzdálenost dvou bodů? Odvoďte vztah pro určení vzdálenosti bodu od roviny (nadroviny). Uveďte tento vztah do souvislosti s neparametrickou rovnicí nadroviny. Jak chápeme pojem vzdálenost dvou podprostorů? Jak určíme vzdálenost dvou mimoběžek v E_3 a vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v E_3. **II. Odchylka podprostorů.** Co rozumíme odchylkou přímky od roviny v E_3? Jak tuto odchylku spočítáme? Jak určíme kolmý průmět jednoho vektoru do směru jiného vektoru? Jak určíme odchylku dvou rovin E_3? Zobecnění do E_n.