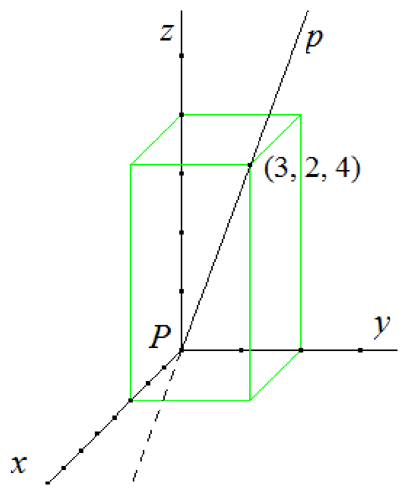
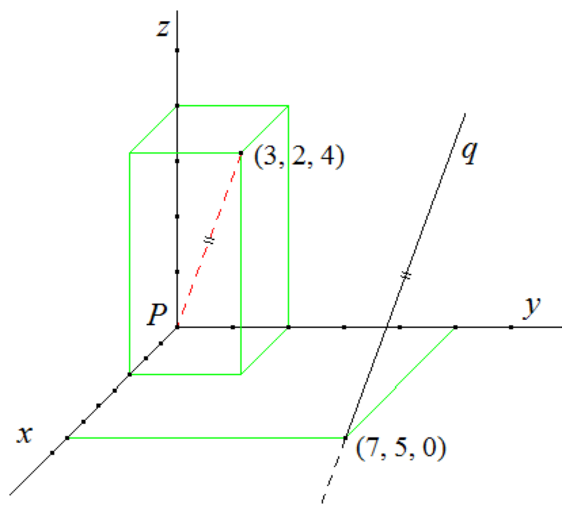
Vektorové prostory R^n $(n = 1, 2, 3)$

(Velikonoční doplněk ke cvičení LAG)

Prvky kartézské mocniny $R^3 = R \times R \times R$ jsou uspořádané trojice reálných čísel, které spolu s operacemi $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ a $c \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$ splňují axiomy vektorového prostoru. Tento vektorový prostor dimenze 3 budeme stručně označovat R^3 a jeho prvky, vektory $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ znázorňovat v kartézské soustavě souřadnic jako body. Poznamenejme, že je to jen jeden z mnoha možných modelů vektorového prostoru. Dá se jednoduše znázorňovat v kartézské soustavě souřadnic a proto jej budeme používat k utváření názorných představ pro úvahy o vektorových prostorech.



Obr. 1



Obr. 2

Každá přímka, která prochází počátkem znázorňuje některý z vektorových podprostorů dimenze 1. Například na obr. 1 je přímka p znázorněním podprostoru $V = \{(3t, 2t, 4t), t \in R\}$, který lze též zapsat jako lineární obal vektoru $(3,2,4)$: $V = [(3,2,4)]$.

Přímky, které neprocházejí počátkem nepředstavují vektorové prostory, neobsahují totiž nulový vektor $\vec{o} = (0,0,0)$ a základní operace nejsou vůči nim uzavřené. Každou takovou přímku lze popsat množinou $\{\vec{a} + t \cdot \vec{u}, t \in R\}$, kde $\vec{a}, \vec{u}$ jsou nenulové vektory. Na obr. 2 je $q = \{(7,5,0) + t \cdot (3,2,4), t \in R\}$. Jiný zápis: $q = \{(x, y, z), x = 7 + 3t,\ y = 5 + 2t, z = 4t, t \in R\}$ (srovnejte si to s parametrickým vyjádřením přímky, které znáte ze střední školy).

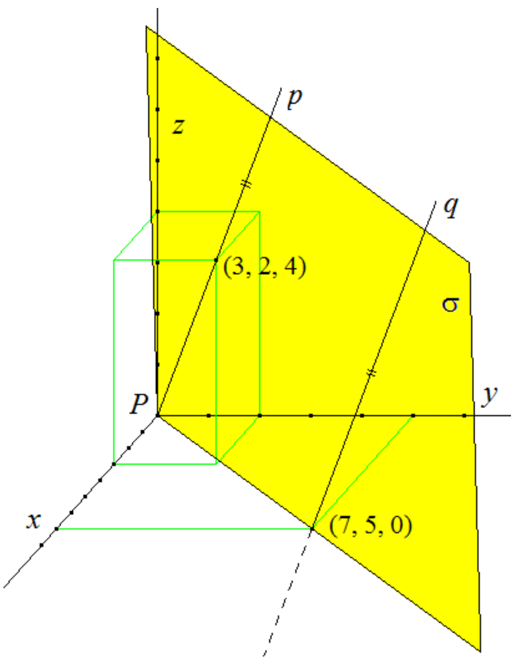
Zápis pomocí symbolu lineárního obalu: $q = (7,5,0) + [3,2,4]$.

Poznámka. Přímka q na obr. 2 je narýsována jako **rovnoběžka** s červeně vyznačenou úsečkou. Zdánlivá sbíhavost (resp. mimoběžnost) obou čar na obrázku patří mezi tzv. optické iluze (způsobené podvědomými procesy, které v naší mysli vytváří prostorovou představu rovinného obrázku).

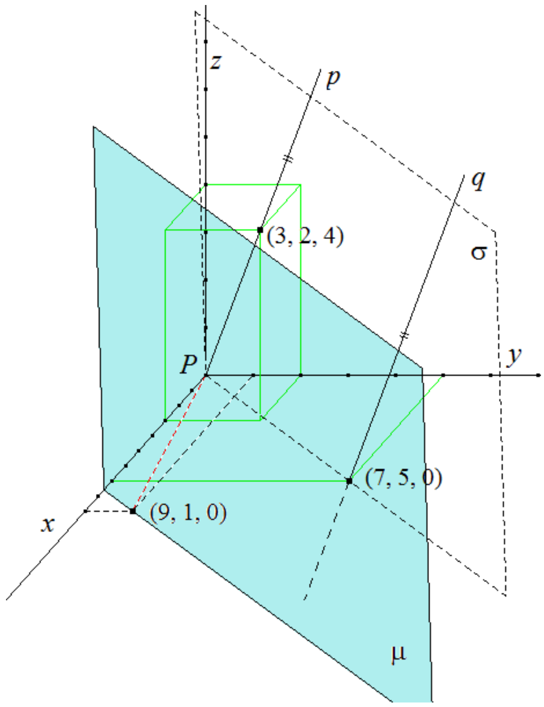
Lineárním obalem množiny q je v našem modelu rovina σ určená přímkou q a počátkem (viz obr. 3). Platí

$$\begin{aligned}\sigma &= \left[\{(7,5,0),(3,2,4)\}\right] = \{r\cdot(7,5,0)+s\cdot(3,2,4),\ r,s\in R\} = \\ &= \{(x,y,z),\, x=7r+3s,\ \ y=5r+2s,\, z=4r,\ \ r,s\in R\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Poslední vztahy v (1) lze považovat za parametrické vyjádření roviny, které znáte ze střední školy. Přesvědčte se, že vyloučením parametrů obdržíte rovnici $20x-28y-z=0$, z níž můžeme zjistit přímky, ve kterých σ protíná souřadnicové roviny xy a xz.



Obr. 3



Obr. 4

Každá rovina, která prochází počátkem, je v tomto modelu znázorněním dvojrozměrného vektorového podprostoru a se dá vyjádřit jako množina $\left[\{\vec{u},\vec{v}\}\right]=\{r\vec{u}+s\vec{v},\ r,s\in R\}$, kde $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{o}$. Vektorové podprostory dimenze 2 někdy také nazýváme **dvojsměry**, kdežto podprostory dimenze 1 se nazývají (neorientované) **směry**.

Roviny, které neprochází počátkem, nepředstavují vektorové prostory. Dají se zapsat ve tvaru $\{\vec{a}+r\vec{u}+s\vec{v},\ r,s\in R\}$, kde $\vec{a},\vec{u},\vec{v}$ jsou pevně zvolené a lineárně nezávislé vektory, nebo ve tvaru $\vec{a}+\left[\{\vec{u},\vec{v}\}\right]$. Na obr. 4 je v kartézské soustavě souřadnic znázorněna rovina

$$\begin{aligned}\mu &= \{(9,1,0)+\left[\{(7,5,0),(3,2,4)\}\right]\} = \{(9,1,0)+r\cdot(7,5,0)+s\cdot(3,2,4),\ r,s\in R\} = \\ &= \{(x,y,z),\, x=9+7r+3s,\ \ y=1+5r+2s,\, z=4r,\ \ r,s\in R\}.\end{aligned}$$

Najděte její obecnou rovnici.

Lineární obal každé množiny $\vec{a}+\left[\{\vec{u},\vec{v}\}\right]$, kde $\vec{a},\vec{u},\vec{v}$ jsou lineárně nezávislé vektory, je vektorový prostor dimenze 3. Platí tedy

$$\left[(9,1,0)+\left[\{(7,5,0),(3,2,4)\}\right]\right]=\left[\{(9,1,0),(7,5,0),(3,2,4)\}\right]=$$
$$=\{t\cdot(9,1,0)+r\cdot(7,5,0)+s\cdot(3,2,4),\ r,s,t\in R\}=R^3=\left[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right].$$

Úlohy

1. Výše uvedený text je klasifikací lineárních podmnožin vektorového prostoru R^3. Proveďte analogické klasifikace lineárních podmnožin vektorových prostorů R^2 a R. Pro jednotlivé možné situace zvolte konkrétní příklady a pro zvolené množiny nakreslete obrázky.

2. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte množiny vektorového prostoru R^3 :

a) $\left[(0,-2,0)\right]$, b) $\left[\{(1,0,0),(2,0,3)\}\right]$, c) $\{(0,2,0)+\left[(-2,0,3)\right]\}$,

d) $\{(0,0,4)+\left[(2,1,0),(1,0,0)\right]\}$, e) $\{(0,3,0)+\left[(6,-3,0),(0,-3,4)\right]\}$,

f) $\left[(0,3,0)+\left[(6,-3,0),(0,-3,4)\right]\right]$, g) $\left[(1,3,0)+\left[(2,0,0),(0,-3,0)\right]\right]$.

Navíc tyto množiny zapište jako množiny lineárních kombinací vektorů , např. zápisy typu $\{(x,y,z),\ x=7r+3s,\ y=5r+2s,\ z=4r,\ r,s\in R\}$ resp. $\{r\cdot(7,5,0)+s\cdot(3,2,4),\ r,s\in R\}$.

Řešené příklady na homomorfismy

Při přesném vyjadřování bychom měli odlišovat vektorové množiny od geometrických útvarů, které jsou jejich znázorněním v kartézské soustavě souřadnic. Kvůli stručnějšímu vyjadřování to nebudeme dělat. Místo "vektor" budeme někdy psát "bod", vektorový podprostor dimenze 2 občas nazveme "rovina" a podprostor dimenze 1 "přímka". Číslování rovnic provádíme pro každý příklad zvlášť.

Příklad 1. Pro homomorfismus $f: R^3\to R^3$ platí:

$$f(1,1,1)=(0,0,1),\ f(4,2,1)=(2,0,1),\ f(6,5,0)=(1,0,0).$$

Určete jeho rovnice, jádro, obraz homomorfismu, obrazy bodů $(9,6,2),(0,0,2)$ a úplné vzory bodů $(3,0,1),(10,3,2)$.

Řešení. Obecný tvar rovnic zobrazení je

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,$$
$$y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,$$
$$z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z.$$

Postupným dosazením podmínek úlohy do těchto rovnic obdržíme soustavu devíti rovnic s neznámými a_{ij}. Tuto soustavu můžeme úsporně zapsat rozšířenou maticí takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\4&2&1&2&0&1\\6&5&0&0&0&1\end{array}\right)$$

Matici ekvivalentně upravíme tak, aby levá část měla tvar jednotkové matice. Pravá část pak bude matice transponovaná k matici homomorfismu (jednotlivé kroky úprav proveďte sami):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \;\dots\; \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Z výsledného tvaru matice určíme $f(x,y,z)=(x-y,0,z).$ (1)

Jádro homomorfismu je výsledek řešení rovnice $f(x,y,z)=\vec{o}.$ Odtud po dosazení našeho předpisu a rozepsání do souřadnic máme

$$x-y=0,\ 0\cdot y=0,\ z=0.$$

Z první rovnice plyne $x=y,$ z druhé $y=t\wedge t\in R,$ ze třetí $z=0.$ Závěr:

$$\mathrm{Ker} f=\{(t,t,0), t\in R\}=[(1,1,0)]. \qquad (2)$$

(Hranaté závorky používáme pro označení lineárního obalu.) Vidíme, že jádro tvoří jednorozměrný vektorový podprostor. Jeho dimenze je 1, zobrazení není prosté.

Ze známého vztahu $\dim(\mathrm{Ker} f)+\dim(\mathrm{Im} f)=\dim V$ dále dostáváme

$\dim(\mathrm{Im} f)=\dim V-\dim(\mathrm{Ker} f)=3-1=2,$ neboť zobrazovaný prostor V je R^3.

Množina $\mathrm{Im}\, f=f(R^3)$ je dvojrozměrný vektorový prostor, který lze v kartézské soustavě souřadnic znázornit jako rovinu obsahující počátek. Je to vlastně lineární obal obrazů vektorů uvedených v zadání:

$$\mathrm{Im}\, f=[\{(0,0,1),(2,0,1),(1,0,0)\}]. \qquad (3)$$

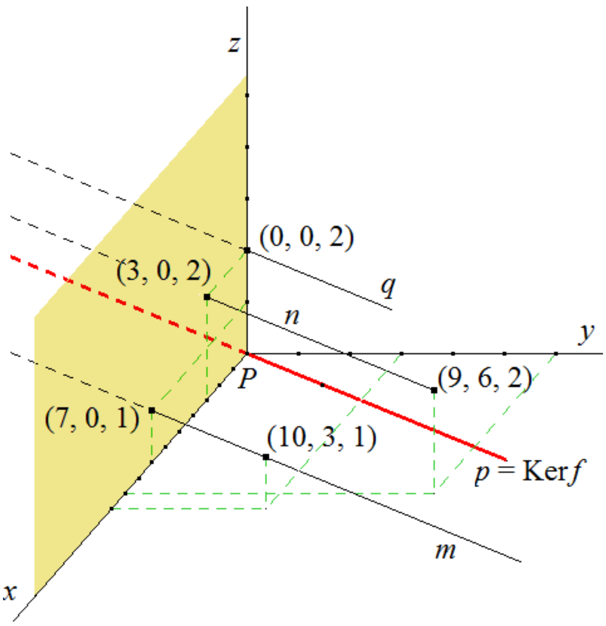
Protože je $\dim(\mathrm{Im}\, f)=2$ a žádný z vektorů ve vztahu (3) není násobkem jiného z nich, můžeme libovolný z nich vypustit (je totiž lineární kombinací druhých dvou). Například zvolíme $\mathrm{Im}\, f=[\{(1,0,0),(0,0,1)\}]$. Množina $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ je pak bází prostoru $\mathrm{Im}\, f$. Zároveň vidíme, že $\mathrm{Im}\, f$ je souřadnicová rovina xy.

Poznamenejme, že tuto bázi lze nalézt i výpočtem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí vztahu (1) určíme $f(9,6,2)=(3,0,2)$ a $f(0,0,2)=(0,0,2)$.

Vektor $(0,0,2)$ se zobrazil sám na sebe.



Obr. 5

Útvary, které se zobrazují na sebe, se nazývají **samodružné útvary**. Pomocí (1) dokažte, že $f(x,0,z)=(x,0,z)$. Rovina xy je rovinou samodružných bodů. Homomorfismus zachovává operace s vektory. Proto platí $f^{-1}(\vec{u})=f^{-1}(\vec{u}+\vec{o})=\vec{u}_1+f^{-1}(\vec{o})=\vec{u}_1+\mathrm{Ker}f$, kde $\vec{u}_1$ je jakýkoliv vektor, jenž splňuje vztah $f(\vec{u}_1)=\vec{u}$.

Úplný vzor vektoru $(3,0,1)$ je tedy $f^{-1}\left((3,0,1)\right)=(3,0,1)+\left[(1,1,0)\right]=\left\{(3+t,t,1), t\in R\right\}$.

Lze jej určit i tímto výpočtem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0|3 \\ 0 & 0 & 0|0 \\ 0 & 0 & 1|1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0|3 \\ 0 & 0 & 1|1 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{pmatrix} \Rightarrow z=1\in R \wedge x-y=3,\ y=t\wedge x=3+t,\ t\in R.$$

Úplný vzor vektoru $(10,3,2)$ nelze určit, protože $(10,3,2)\notin \mathrm{Im}\,f$. Kdybychom jej počítali, dopadlo by to takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0|10 \\ 0 & 0 & 0|3 \\ 0 & 0 & 1|2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0|10 \\ 0 & 0 & 1|2 \\ 0 & 0 & 0|3 \end{pmatrix}.$$

Soustava nemá řešení, protože hodnost matice je menší než hodnost matice rozšířené.

Příklad 2. Určete jádro a obraz homomorfismu $f(x,y,z)=(4x+8y, x+2y, 3x+6y)$. Dále určete obraz vektoru $\vec{a}=(4,-1,-5)$ a úplné vzory vektorů $\vec{u}=(8,2,6), \vec{v}=(24,6,18)$, $\vec{b}=(0,0,5)$ a $\vec{c}=(4,0,3)$.

Řešení. Nejprve určíme jádro řešením rovnice $f(x,y,z)=\vec{o}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0|0 \\ 4 & 8 & 0|0 \\ 3 & 6 & 0|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{pmatrix} \Rightarrow z=s\in R\wedge x+2y=0,\ y=r,\ x=-2r.$$

Odtud

$$\mathrm{Ker}f=\left\{(-2r,r,s), r,s\in R\right\}=\left[\left\{(0,0,1),(-2,1,0)\right\}\right], \tag{2}$$

$\dim(\mathrm{Ker}f)=2.$ Ze známého vztahu $\dim(\mathrm{Ker}f)+\dim(\mathrm{Im}f)=\dim V$ máme $\dim(\mathrm{Im}f)=\dim V-\dim(\mathrm{Ker}f)=3-2=1,$ neboť zobrazovaný prostor V je R^3.

Množina $\mathrm{Im}\,f=f(R^3)$ je tedy jednorozměrný vektorový prostor, který lze v kartézské soustavě souřadnic znázornit jako přímku obsahující počátek. Můžeme ji nalézt jako lineární obal obrazů vektorů báze daného prostoru:

$$\mathrm{Im}\,f=\left[f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\right],$$

$$\mathrm{Im}\,f=\left[\left\{(4,1,3),(8,2,6),(0,0,0)\right\}\right]=\left[(4,1,3)\right]=\left\{(4t,3t,t), t\in R\right\}. \tag{3}$$

Obraz vektoru $\vec{a}=(4,-1,-5)$: $\vec{a}'=f(\vec{a})=(8,2,6)$.

Úplný vzor vektoru $\vec{u}=(8,2,6)$ lze určit užitím pojmu $\mathrm{Ker}f$ nebo přímým výpočtem. 1. způsob: Víme, že homomorfismus zachovává operace s vektory. Proto platí

$f^{-1}(\vec{u}) = f^{-1}(\vec{u}+\vec{o}) = \vec{u}_1 + f^{-1}(\vec{o}) = \vec{u}_1 + \operatorname{Ker} f$, kde $\vec{u}_1$ je jakýkoliv vektor, jenž splňuje vztah $f(\vec{u}_1) = \vec{u}$. S využitím výsledků předchozích výpočtů dostáváme

$$f^{-1}\big((8,2,6)\big) = (4,-1,-5) + \big[\{(-2,1,0),\,(0,0,1)\}\big] = \{(4-2r,\,-1+r,\,-5+s),\, r,s \in R\}. \qquad (4)$$

2. způsob: $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0|8 \\ 1 & 2 & 0|2 \\ 3 & 6 & 0|6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0|2 \\ 0 & 0 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \beta \in R \wedge x + 2y = 2,\ y = \alpha, x = 2 - 2\alpha.$

$$f^{-1}\big((8,2,6)\big) = \{(2-2\alpha,\,\alpha,\,\beta),\ \alpha,\beta \in R\} = \{(4-2r,\,-1+r,\,-5+s),\ r,s \in R\}.$$

Zdůvodněte poslední rovnost a výpočtem dokažte, že

$$f^{-1}\big((24,6,18)\big) = (6,0,0) + \big[\{(-2,1,0),\,(0,0,1)\}\big] = \{(6-2r,\,r,\,s),\ r,s \in R\} \qquad (5)$$

a

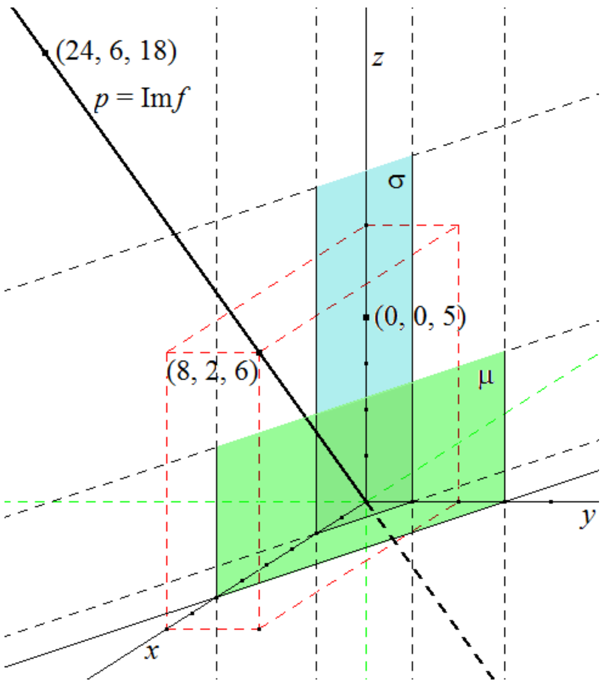
$$f^{-1}\big((0,0,5)\big) = \big[\{(-2,1,0),\,(0,0,1)\}\big] = \{(-2r,\,r,\,s),\ r,s \in R\} = \operatorname{Ker} f. \qquad (6)$$

Výpočet úplného vzoru vektoru $\vec{c} = (4,0,3)$ nemusíme provádět, neboť $(4,0,3) \notin \operatorname{Im} f$. Ze vztahu (3) totiž plyne, že nenulové vektory prostoru $\operatorname{Im} f$ mají složky v poměru $4:3:1$. Pro úplnost si však postup výpočtu uvedeme:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0|4 \\ 1 & 2 & 0|0 \\ 3 & 6 & 0|3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|4 \\ 0 & 0 & 0|1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je menší než hodnost matice rozšířené, a tak soustava nemá řešení.

V kartézské soustavě souřadnic ještě znázorníme úplné obrazy zadaných bodů. Je-li $\vec{u}' = f(\vec{u})$, pak $f^{-1}(\vec{u}') = \vec{u} + \operatorname{Ker} f$. Odtud plyne, že úplný vzor vektoru $\vec{u}'$ vznikne posunutím roviny $\operatorname{Ker} f$ o vektor $\vec{u}$. Úplné vzory vektorů jsou tedy roviny rovnoběžné s osou z.



Obr. 6

Když ve (4) zvolíme $(r,s) = (1,5)$ a pak $(r,s) = (2,5)$, zjistíme že $f^{-1}\big((8,2,6)\big)$ obsahuje body $(2,0,0)$ a $(0,1,0)$. Protíná tedy rovinu xy v přímce těmito body určené. Tím je poloha roviny $\sigma = f^{-1}\big((8,2,6)\big)$ určena. Na obr. 6 je modrou barvou vyznačena část roviny σ, která se nachází v prvním oktantu. Množina $\operatorname{Ker} f$ na obrázku vyznačena není. Dále platí $f^{-1}\big((24,6,18)\big) = \mu$. Přesvědčte se o tom.

Příklad 3. Pro homomorfismus $f: R^3 \to R^3$ platí:

$$f(1,0,0) = (1,2,2),\ f(-2,0,3) = (4,2,-1),\ f(1,1,1) = (5,5,5).$$

Určete jeho rovnice, jádro, obraz a typ homomorfismu, dále určete obrazy vektorů $\vec{u} = (0,1,3)$, $\vec{v} = (-2,3,1)$, úplný vzor vektoru $\vec{n} = (1,3,6)$, obraz souřadnicové roviny $\sigma = xz$, obraz osy z a roviny $\mu: z = 3$. Poslední tři objekty a jejich obrazy znázorněte v kartézské soustavě souřadnic.

Řešení. Obdobně jako v příkladu 1 vypočítáme koeficienty matice homomorfismu (jednotlivé kroky úprav proveďte sami):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \ \dots \ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Čísla ve sloupcích pravé části výsledné matice určují po řadě koeficienty v řádcích transformačních rovnic a tak platí

$$f\!: \begin{aligned} x' &= x + 2y + 2z, \\ y' &= 2x + y + 2z, \\ z' &= 2x + 2y + z. \end{aligned} \tag{1}$$

Jinak zapsáno, $f(x,y,z) = (x + 2y + 2z,\ 2x + y + 2z,\ 2x + 2y + z)$.

Jádro homomorfismu určíme řešením rovnice $f(x,y,z) = \vec{o}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \ \dots \ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Ker} f = (0,0,0) = \vec{o}. \tag{2}$$

Obraz homomorfismu je lineární obal vektorů-obrazů ze zadání. Přesvědčíme se, že jsou nezávislé:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Je tedy

$$\mathrm{Im} f = \left[(1,2,2), (4,2,-1), (5,5,5)\right] = \left[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\right] = R^3,\ \dim(\mathrm{Im} f) = 3, \dim(\mathrm{Ker} f) = 0.$$

Zobrazení je izomorfismus (bijektivní homomorfismus, prosté lineární zobrazení R^3 na R^3.)

Rovina $\sigma = xz$ je vektorový podprostor dimenze 2. Můžeme ji vyjádřit rovnicí $y = 0$ nebo jako lineární obal, resp. parametricky:

$$\sigma = \left[\{(1,0,0), (0,0,1)\}\right] = \{(r,0,s),\ r,s \in R\} = \{(x,y,z),\ x = r,\ y = 0,\ z = s,\ r,s \in R\}.$$

Obraz podprostoru σ:

$$f(\sigma) = f\left((r,0,s)\right) = \{(r + 2s,\ 2r + 2s,\ 2r + s),\ r,s \in R\}. \tag{3}$$

Vidíme, že $f(\sigma)$ je rovina, která prochází počátkem soustavy souřadnic, jinak řečeno množina všech vektorů dvourozměrného vektorového prostoru. Zobrazíme ji pomocí jejích průsečnic se souřadnicovými rovinami. Ty určíme takto:

Průsečnice p s rovinou s rovinou xy je množina těch bodů roviny $f(\sigma) = \{(r+2s,\, 2r+2s,\, 2r+s),\, r,s \in R\}$, které mají z-ovou souřadnici rovnu nule. Z rovnice $2r+s=0$ tedy určíme $s=-2r$ a dosadíme do (3). Zjistíme, že $p = \{(-3r,-2r,0),\ r \in R\}$. Protože však r nabývá všech reálných hodnot, můžeme poslední zápis přepsat do tvaru

$$p = \{(3r,2r,0),\ r \in R\}. \tag{4}$$

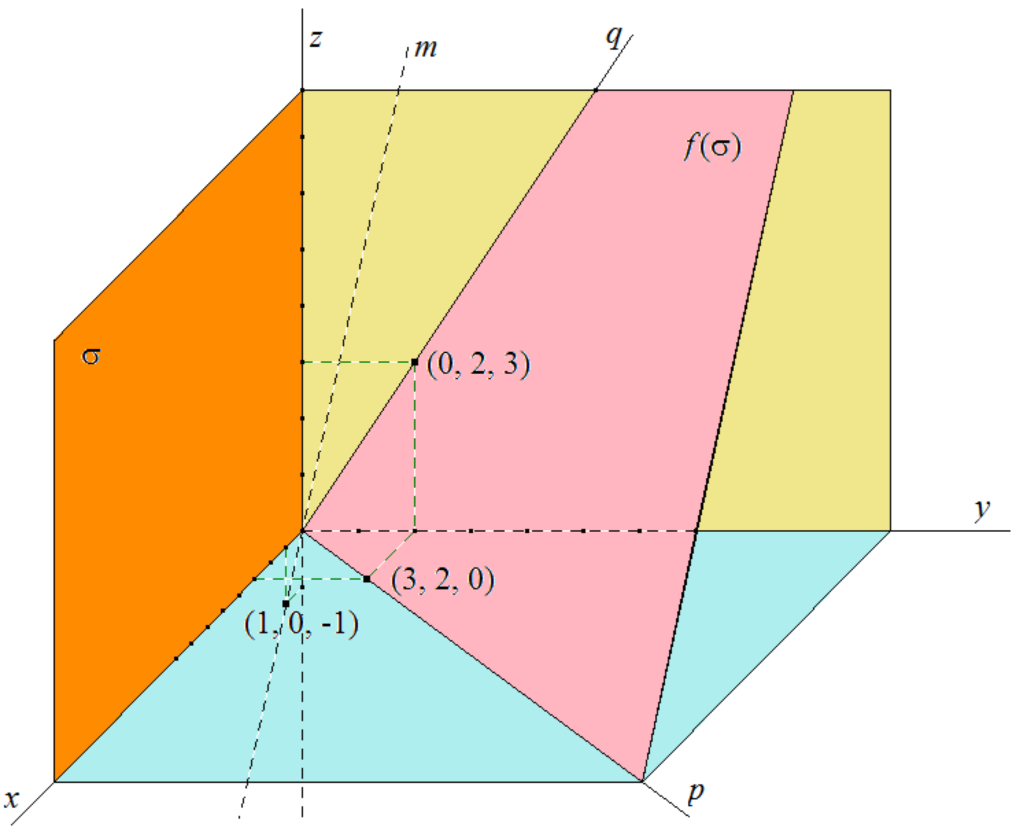
Průsečnici q s rovinou yz určíme analogicky: $r+2s=0 \Rightarrow r=-2s$,

$$q = \{(0,2s,3s),\ s \in R\}. \tag{5}$$

Nakonec určíme průsečnici m s rovinou s rovinou xz: $2r+2s=0 \Rightarrow r=-s$,

$$m = \{(s,0,-s),\ s \in R\}. \tag{6}$$

Množiny *p, q, r* jsou přímky, které prochází počátkem. K určení každé z nich stačí určit již jen jeden bod různý od počátku. Ten nalezneme, když ve vztazích (4) až (6) položíme například $r=1$, resp. $s=1$. Znázornění rovin σ a $f(\sigma)$ vidíme na obr. 7.



Obr. 7

K úkolu najít obrazy vektorů uvádíme výsledky (proveďte sami výpočet):

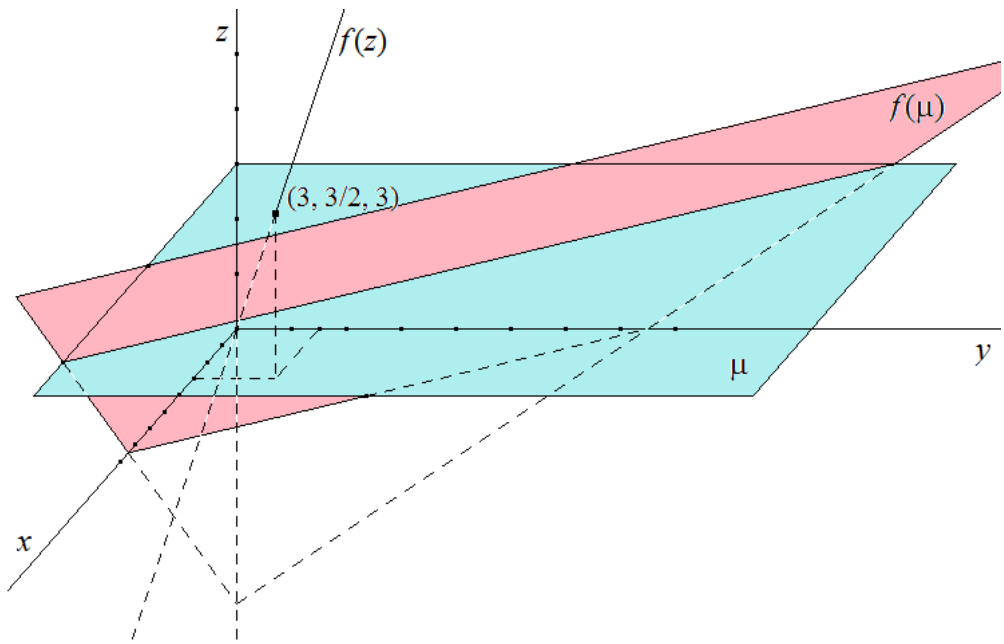
$$f(\vec{u}) = f\left(0,1,3)\right) = (8,7,5), \quad f(\vec{v}) = f\left(-2,3,1)\right) = (6,1,3).$$

Vektor $f^{-1}(\vec{n}) = f^{-1}\left(3,1,-2)\right)$ nalezneme vyřešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3, \\ 2x + y + 2z &= 1, \\ 2x + 2y + z &= -2. \end{aligned}$$

Výsledek: $f^{-1}(\vec{n}) = \left(1,3,6)\right)$. Vyšel jediný vektor, neboť zobrazení je prosté, $\operatorname{Ker} f = \vec{o}$.

Výpočty obrazu roviny μ a osy z proveďte sami. Výsledky jsou znázorněny na obr. 8.



Obr. 8

Brzy se budete také zabývat vlastnostmi afinních zobrazení. Mezi ně patří promítání, souměrnosti, stejnolehlost, posunutí a otočení. K hlubšímu porozumění této látky doporučuji publikaci

Geometrická zobrazení,

kterou si můžete zakoupit za 129,- Kč v prodejně skript nebo přímo u mne.

3.4.2013 Pavel Leischner