LAG, cvičení 1

Homogenní lineární rovnice a jejich soustavy

(Shrnutí a doplnění toho, co jsme dělali. Cvičení předchází přednášku, vycházíme z poznatků, které byste měli znát ze střední školy.)

Algebraická rovnice s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je rovnice typu $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$ kde $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je polynom. Stupeň rovnice = stupeň polynomu *P*. Homogenní algebraické rovnice jsou ty, u nichž všechny členy polynomu na levé straně rovnice mají stejný stupeň.

Příklady: $5x + 3y - z = 0$ je homogenní rovnice prvního stupně se třemi neznámými, $x^2 - 2xy = 0$ nebo $x^2 - y^2 = 0$ jsou homogenní rovnice druhého stupně se 2 neznámými, $3x^2y^2 + 2x^2yz - 7xy^2z - z^4 = 0$ je homogenní rovnice 4. stupně se 3 neznámými apod.

1. V kartézské soustavě souřadnic v E_2 je dána přímka $q: x = 5 + 3r, y = 2r, r \in R.$ Určete parametrické vyjádření přímky *p*, která je kolmá na *q* a prochází počátkem.

Řešení. Zadaná přímka *q* má symbolické vyjádření $X = A + r\vec{v},$ kde $r \in R,$ $A = [5;0]$ a $\vec{v} = (3;2).$ Hledaná přímka má symbolické vyjádření

$$p: X = P + t\vec{u}, \tag{1}$$

kde $t \in R,$ $P = [0;0]$ je počátek soustavy souřadnic a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ je libovolný nenulový vektor kolmý ke směrovému vektoru $\vec{v}$ přímky *q*. Zbývá určit vektor $\vec{u}$.
Ze vztahu $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = u_1v_1 + u_2v_2$ plyne, že $\vec{u} \perp \vec{v},$ právě když $u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$ Po dosazení odtud dostaneme **lineární homogenní rovnici se dvěma neznámými** u_1, u_2

$$3u_1 + 2u_2 = 0, \tag{2}$$

které vyhovuje nekonečně mnoho dvojic $(u_1, u_2).$ Nám stačí najít libovolnou z nich. Bývá zvykem zvolit $u_1 = 2$ a $u_2 = -3,$ neboť $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0.$ (Vzpomeňte na pravidlo ze střední školy: "Vektor kolmý k nenulovému vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dostaneme, když zaměníme souřadnice vektoru $\vec{v}$ a u jedné z nich změníme znaménko.") Můžeme volit samozřejmě i jiné vyhovující dvojice $(u_1, u_2),$ například $(-2;3), (1;-3/2), (-12;18), (5;-15/2), \ldots$
Závěr. Parametrické vyjádření hledané přímky má tvar

$$p: x = 2t, y = -3t, \text{ kde } t \in R.$$

2. V prostoru V_2 se skalárním součinem určete všechny vektory $\vec{x}$ kolmé k vektoru $\vec{v} = (3;2).$

Řešení. Pro $\vec{x} = (x, y)$ dostaneme z podmínky skalárního součinu homogenní rovnici

$$3x + 2y = 0, \tag{2a}$$

která je až na označení proměnných totožná se vztahem (2). Analogicky jako v předchozí úloze zjistíme $x = 2t, y = -3t,$ kde $t \in R.$
Závěr. $\vec{x} \in V_1 = \{(3t, -2t), t \in R\}.$ Písmenem V_1 jsme označili množinu všech kořenů rovnice (2). Je to množina všech násobků vektoru $\vec{v} = (3;2),$ **jednorozměrný vektorový podprostor** prostoru $V_2,$ jinak též (**neorientovaný**) **směr**. (Neorientovaný směr je např. svislý směr. Naproti tomu je směr svislý vzhůru, nebo směr svislý dolů **orientovaný**.)

3. V kartézské soustavě souřadnic v E_3 je dána rovina

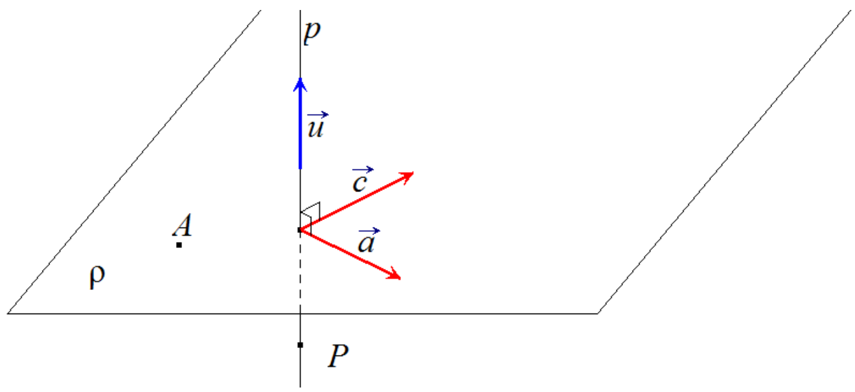
$$\rho: x = 5 - r + 2s,\ y = 1 + 3r - s,\ z = r + s,\ \text{kde } r, s \in R.$$

Určete parametrické vyjádření přímky *p*, která prochází počátkem a je kolmá na ρ.

Řešení. Daná rovina ρ má symbolické vyjádření $X = A + r\vec{a} + s\vec{c}$, kde $r, s \in R$, $A = [5;1;0]$, $\vec{a} = (-1;3;1)$ a $\vec{c} = (2;-1;1)$. Hledaná přímka *q* má symbolické vyjádření

$$X = P + t\vec{u}, \tag{3}$$

kde $t \in R$, $P = [0;0;0]$ je počátek soustavy souřadnic a $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je libovolný nenulový vektor kolmý k vektorům $\vec{a}$ a $\vec{c}$, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ (viz obrázek).



Z podmínek kolmosti vektorů dostáváme soustavu dvou lineárních homogenních rovnic se třemi neznámými u_1, u_2 a u_3,

$$-u_1 + 3u_2 + u_3 = 0 \quad \text{a} \quad 2u_1 - u_2 + u_3 = 0, \tag{4}$$

kterou ekvivalentně upravíme (proveďte sami) na tvar

$$u_1 - 3u_2 - u_3 = 0 \quad \text{a} \quad 5u_2 + 3u_3 = 0.$$

V poslední rovnici zvolíme $u_2 = 3$ a $u_3 = -5$ a po dosazení do předposlední rovnice (proveďte!) zjistíme $u_1 = 4$. Tedy $\vec{u} = (4;3;-5)$.

Závěr. Parametrické vyjádření hledané přímky má tvar $p: x = 4t,\ y = 3t,\ z = -5t,$ kde $t \in R$.

4. V prostoru V_3 se skalárním součinem určete všechny vektory $\vec{x}$ kolmé k vektorům $\vec{a} = (-1;3;1)$ a $\vec{c} = (2;-1;1)$.

Řešení. Pro $\vec{x} = (x, y, z)$ dostaneme z podmínky skalárních součinů soustavu

$$-x + 3y + z = 0 \quad \text{a} \quad 2x - y + z = 0, \tag{4a}$$

která je až na označení proměnných totožná s rovnicemi (4). Analogicky jako v předchozí úloze zjistíme

$$\vec{x}: x = 4t,\ y = 3t,\ z = -5t,\ \text{kde } t \in R.$$

Závěr. $\vec{x} \in V_1 = \{(4t, 3t, -5t), t \in R\}$. Množinou všech kořenů soustavy (4a) je jednorozměrný vektorový podprostor jednoznačně určený vektorem $\vec{u} = (4;3;-5)$.

5. V kartézské soustavě souřadnic v E_3 je dána přímka

$$p: x = 6t,\ y = 1 - 2t,\ z = 7 + 3t,\ \text{ kde } t \in R.$$

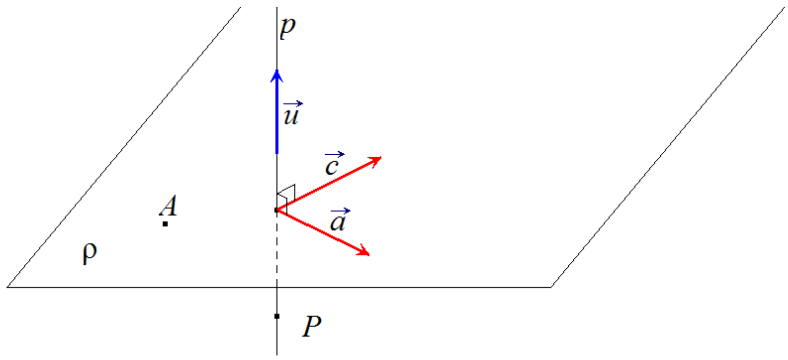
Určete parametrické vyjádření roviny ρ, která prochází počátkem a je kolmá na p.

Řešení. Daná přímka p má symbolické vyjádření $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in R$, $A = [0;1;7]$ a $\vec{u} = (6;-2;3)$. Hledaná rovina ρ má symbolické vyjádření $X = P + r\vec{a} + s\vec{c}$, kde $r, s \in R$, $P = [0;0;0]$ je počátek soustavy souřadnic a $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ jsou nenulové vektory rovnoběžné s rovinou ρ. Podmínka $\rho \perp p$ je splněna, právě když $\vec{a} \perp \vec{u}$ a $\vec{c} \perp \vec{u}$ (viz obrázek). Odtud s využitím podmínky skalárního součinu dostáváme

$$6a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \ \text{ a } \ 6c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0.$$

Vidíme, že vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ jsou libovolné dva **nezávislé** kořeny vektorové rovnice $\vec{u} \cdot \vec{x} = 0$, která má pro $\vec{x} = (x, y, z)$ po rozepsání do souřadnic tvar

$$6x - 2y + 3z = 0. \qquad (5)$$



Kořeny $\vec{a}, \vec{c}$ nalezneme tak, že dvě souřadnice zvolíme a třetí pomocí vztahu (5) vypočítáme. Abychom měli jistotu, že $\vec{a}, \vec{c}$ budou nezávislé, položíme při hledání vektoru $\vec{a}$ určitou souřadnici rovnu nule a při hledání vektoru $\vec{c}$ jinou souřadnici rovnu nule.
Konkrétně pro vektor $\vec{a}$ zvolíme $y = 0$, po dosazení do (5) je $6x + 3z = 0$, a po volbě $x = 1$ nalezneme $z = -2$. Podobně pro vektor $\vec{c}$ po volbě $z = 0$ máme $6x - 2y = 0$ a odtud $x = 1$, $y = 3$. Je tedy $\vec{a} = (1;0;-2)$ a $\vec{c} = (1;3;0)$.
Závěr. Parametrické vyjádření hledané roviny je $\rho: x = r + s,\ y = 3s,\ z = -2r$, kde $r, s \in R$.

6. V prostoru V_3 se skalárním součinem určete všechny vektory $\vec{x}$ kolmé k vektoru $\vec{u} = (6;-2;3)$.

Řešení. Pro $\vec{x} = (x, y, z)$ dostaneme z podmínky skalárních součinů rovnici (5) vyřešenou v předchozí úloze.
Závěr. $\vec{x} \in V_1 = \{(4t, 3t, -5t), t \in R\}$. Množinou všech kořenů soustavy (4a) je jednorozměrný vektorový podprostor jednoznačně určený vektorem $\vec{u} = (4;3;-5)$.

Poznámka. Každá soustava homogenních rovnic s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má triviální řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$ Kromě toho může mít i netriviální řešení, jak jsme viděli při řešení předchozích úloh.

Množinu kořenů soustavy lineárních homogenních rovnic můžeme v geometrii interpretovat
a) jako vektorový podprostor,
b) jako lineární útvar (přímka, rovina, ...), který obsahuje počátek soustavy souřadnic.

7. Řešte soustavu homogenních rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0, \\ x + 3y + 2z &= 0, \\ 3x - 5y + 4z &= 0, \\ x + 17y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

Jakou má tato soustava interpretaci v prostoru V_3 se skalárním součinem a jakou v euklidovském bodovém prostoru E_3?

Řešení. Zodpovíme nejprve druhou část úlohy: V prostoru V_3 se skalárním součinem máme nalézt množinu všech vektorů $\vec{x} = (x, y, z),$ které jsou kolmé k vektorům $(2;-1;3),$ $(1;3;2),$ $(3;-5;4)$ a $(1;17;4).$ V bodovém prostoru E_3 máme nalézt přímku nebo rovinu, která prochází počátkem a je rovnoběžná s vektory $(2;-1;3),$ $(1;3;2),$ $(3;-5;4)$ a $(1;17;4).$

Řešení soustavy:

Zapíšeme ji maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix},$ kterou ekvivalentně (proveďte sami) upravíme na stupňovitý tvar, jenž po vynechání nulových řádku vypadá takto: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$ Tato matice představuje soustavu $x + 3y + 2z = 0, 7y + z = 0.$ Poslední rovnici vyhovují všechna $y = t$ a $z = -7t,$ kde $t \in R.$ Po jejich dosazení do zbývající rovnice soustavy zjistíme, že $x = 11t.$
Závěr. $\{(x, y, z)\} = \{(11t, t, -7t), t \in R\}.$

Poznámka. Množina kořenů může být zapsána i jinak,

například $\left\{\left(-2\sqrt{3}\,r, \frac{-2\sqrt{3}}{11}r, \frac{14\sqrt{3}}{11}r\right), r \in R\right\}.$ Všechny zápisy však musí splňovat vztah $x : y : z = 11 : 1 : (-7).$

8. Řešte soustavy rovnic:

a) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=0,\\ -2x_1+3x_2-3x_3+4x_4&=0,\\ x_1-3x_2+x_4&=0,\\ -x_1+4x_2+x_3-3x_4&=0. \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4&=0,\\ x_1+5x_2+x_3+2x_4&=0,\\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4&=0. \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4&=0,\\ -3x_1+2x_2+x_3-2x_4&=0,\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=0,\\ 3x_1-4x_2-x_3+2x_4&=0,\\ -3x_1+5x_2-6x_3+4x_4&=0. \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1-x_2-x_3+4x_4+x_5&=0,\\ x_2-3x_3+5x_4+x_5&=0,\\ 2x_1-5x_3+13x_4+3x_5&=0,\\ x_1-3x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 2x_1-4x_2+x_3+3x_4+x_5&=0. \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x_1-x_2-x_3+4x_4+x_5&=0,\\ 2x_2-3x_3+5x_4+x_5&=0,\\ 2x_1-5x_3+13x_4+3x_5&=0,\\ x_1-3x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 2x_1-4x_2+x_3+3x_4+x_5&=0. \end{aligned}$

Výsledky. a) $\{\vec{a}t;\vec{a}=(11;1;-7),\, t\in R\}$, b) $\{(0;0;0;0)\}$ c) $\{(2t;2t;0;-t),\, t\in R\}$,

d) $\left\{r\vec{a}+s\vec{b};\ \vec{a}=(-7;0;5;3;0),\, \vec{b}=(-2;0;1;0;3);\ r,s\in R\right\}=$

$=\{(-7r-2s,\, 0,\, 5r+s,\, 3r,\, 3s);\ r,s,t\in R\}$.

Ve vektorové interpretaci je to dvojrozměrný vektorový podprostor prostoru V_5.

e) $\left\{r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c};\ \vec{a}=(3;1;0;0;-2),\, \vec{b}=(5;3;2;0;0),\, \vec{c}=(13;5;0;-2;0);\ r,s,t\in R\right\}=$

$=\{(3r+5s+13t,\, r+3s+5t,\, 2s,\, -2t,\, -2r);\ r,s,t\in R\}$.

Ve vektorové interpretaci je to trojrozměrný vektorový podprostor prostoru V_5.