3 Důkazy matematických vět

- obecné věty: $\forall\, x \in M; V(x)$

- existenční věty: $\exists\, x \in M; V(x)$

Obecné věty jsou ve tvaru **implikace** $A \Rightarrow B$ nebo ve tvaru **ekvivalence** $A \Leftrightarrow B$.

Hlavní typy důkazů

1. Přímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$

Vytváříme řetězec pravdivých implikací ve tvaru:

$$A \Rightarrow A_1,\ A_1 \Rightarrow A_2,\ A_2 \Rightarrow A_3,\ ..., A_n \Rightarrow B$$

Příklad: Dokažte větu: $\forall\, n \in N; n$ je sudé $\Rightarrow n^2$ je sudé

Příklad: Dokažte nerovnost: $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$.

2. Nepřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$

Převedeme na důkaz **obměny** (kontrapozice) původní věty,
tj. místo $A \Rightarrow B$ dokazujeme implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$. To nám umožňuje následující tautologie

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Příklad: Dokažte větu: $\forall\, n \in N; n^2$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

Příklad: Pro všechna přirozená čísla a, b platí: Když se nedá zkrátit zlomek $\dfrac{a-b}{a+b}$, pak se nedá zkrátit ani $\dfrac{a}{b}$. Dokažte.

3. Důkaz sporem

Dokazujeme-li pravdivost výroku V, vyjdeme z jeho negace $\neg V$ a řetězcem implikací

$$\neg V \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow V_3 \Rightarrow ... \Rightarrow \neg Z$$

dospějeme k nepravdivému závěru $\neg Z$, tj. dospějeme ke sporu. Z toho je zřejmé, že předpoklad $\neg V$ je nesprávný a platí tedy původní výrok V.

Příklad: Dokažte větu: $\forall\, n \in N; n^2$ je sudé $\;\Rightarrow n$ je sudé

Příklad: Dokažte větu: $\forall\, a, b \in R; (a > 0 \wedge b > 0) \;\Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

4. Důkaz matematickou indukcí

Matematickou indukcí dokazujeme věty ve tvaru

$$\forall\, n \in N, n \geq n_0; V(n),$$

kde N je množina přirozených čísel. Obsahem takové věty je, že uvedená vlastnost $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n počínaje hodnotou n_0.

Důkaz matematickou indukcí má pevnou strukturu, která je tvořena následujícími dvěma kroky:

I. Dokážeme platnost vlastnosti $V(n)$ pro konkrétní hodnotu proměnné n. Dosadíme za ní počáteční hodnotu n_0.

II. (**tzv. indukční krok**) Dokážeme, že pokud platí vlastnost V pro n, platí i pro následující hodnotu $n+1$. Tj. dokazujeme, že pro každé $n \geq n_0$ **platí implikace**

$$V(n) \Rightarrow V(n+1),$$

kde předpoklad $V(n)$ nazýváme **indukční předpoklad**.

Příklad: Dokažte větu: $\forall\, n \in N; n^2$ je sudé $\;\Rightarrow n$ je sudé

Příklad: Dokažte tvrzení: $\forall\, n \in N; 11 \mid (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n)$

3.1 Úlohy

1. Dokažte, že číslo $\sqrt{7}$ je iracionální.

2. Dokažte nepřímo větu: „Pokud je součet dvou celých čísel liché číslo, potom je součin těchto čísel číslo sudé.“

3. Dokažte, že jestliže nelze kružítkem a pravítkem sestrojit úhel o velikosti $1°$, pak nelze sestrojit ani úhel o velikosti $19°$.

4. Matematickou indukcí dokažte „Moivrovu větu“:

$$\forall\, n \in N, \forall\, x \in R; (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

5. Matematickou indukcí dokažte „Binomickou větu“:

$$\forall\, n \in N, \forall\, a, b \in R; (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

6. Dokažte přímo:

$$\forall\, a, b \in (1, +\infty); \log_a b + \log_b a \geq 2.$$