1 Základní pojmy matematické logiky

Výrokový počet … syntaktické hledisko

Predikátový počet … sémantické hledisko

1.1 VÝROKOVÝ POČET

výrok - každé sdělení, u něhož má smysl se ptát, zda je či není pravdivé, a pro něž právě jedna z těchto dvou možností nastává.

Příklady výroků:
5 je liché číslo.
Lidé jsou neopeření dvounožci.
$10 > 15$

Pravdivostní hodnota výroku: 1 (pravda, +), 0 (nepravda, -)

Výrokové proměnné (výroky): $A, B, C, ...$

Výrokové formule (slova, složené výroky): $\varphi \sim A \Rightarrow (B \vee C)$
(vlnka $\sim$ je symbolem totožnosti)

Význam uvedených pojmů: Dosadíme-li do libovolné výrokové formule za všechny proměnné nějaké konkrétní výroky, vznikne výrok. Naopak, jestliže máme nějaký výrok, vždy k němu můžeme najít odpovídající formuli.

Příklad:

$$A \Rightarrow B$$

$$2 \text{ nedělí } n \Rightarrow 2 \text{ nedělí } n^2$$

LOGICKÉ SPOJKY - spojování výroků

NEGACE $\neg A$, A', non$A$ (není pravda, že A)

Tabulka pravdivostních hodnot:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Příklad: A: $n > 5$ $\neg A$: $n \leq 5$

KONJUNKCE $A \wedge B$ (A a B, A a současně B, A a zároveň B)

Tabulka pravdivostních hodnot:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Příklad: Číslo 9 je druhou mocninou a je dělitelné třemi.

DISJUNKCE $A \vee B$ (A nebo B)

Tabulka pravdivostních hodnot:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Příklady:

a) Přímky p, q jsou rovnoběžné nebo různoběžné.

b) 0 nebo 1 řeší rovnici $x^2 - x = 0$.

Poznámka: Z programování známe operátory OR (odpovídá uvedené definici disjunkce, tzv. inclusive-OR) a XOR (tzv. exclusive-OR, tj. vylučovací nebo, někdy značíme $\underline{\vee}$).

IMPLIKACE $A \Rightarrow B$ (jestliže A, potom B; z A plyne B)

Tabulka pravdivostních hodnot:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Příklad: Jestliže je přirozené číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi.

EKVIVALENCE $A \Leftrightarrow B$ (A tehdy a jen tehdy, když B)

Tabulka pravdivostních hodnot:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Příklady:

a) Přirozené číslo je dělitelné devíti právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný devíti.

b) Pythagorova věta.

ÚKOL: Proveďte pravdivostní ohodnocení (tj. určete tabulku pravdivostních hodnot) výrokové formule $\varphi = \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

Tautologie - výroková formule, jejíž pravdivostní hodnota je rovna 1 bez ohledu na pravdivostní hodnoty výroků (proměnných), z kterých je sestavena.
Opakem (negací) tautologie je **kontradikce**, jejíž pravdivostní hodnota je pořád rovna 0.

Příklady tautologií

Komutativnost $\wedge$, $\vee$

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$$
$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$$

Asociativnost $\wedge$, $\vee$

$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$
$$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

Distributivnost $\wedge$, $\vee$

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

Poznámka: Tatologie můžeme využít při důkazech některých vět. Například vět, týkajících se některých množinových vztahů.

Další důležité tautologie

de Morganova pravidla

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Zákon dvojité negace

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

Negace implikace

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Zákon transpozice (obměna)

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Zápis ekvivalence pomocí implikací (používáme při důkazu ekvivalence)

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

Zákon o vyloučeném třetím

$$A \vee \neg A$$

IMPLIKACE

Tvar implikace má většina matematických vět.

$$A \Rightarrow B$$

Výrok A nazýváme „předpoklad" (též „premisa"), výrok B potom nazýváme „závěr" (též „conclusio")

Nutná a postačující podmínka

V případě vět ve tvaru implikace se budeme často setkávat s následujícími charakteristikami rolí výroků A, B ve větě:

„A je **postačující** podmínkou pro B"
„B je **nutnou** podmínkou pro A"

Příklad: (Tzv. nutná podmínka konvergence řady)
Jestliže nekonečná číselná řada $\sum a_n$ konverguje, pak platí

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Poznámka: Grafická interpretace pojmů nutná a postačující podmínka.

V souvislosti s implikací se vyplatí znát tyto její úpravy:

i) **Negace implikace:** $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

ii) **Obměna:** $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
iii) **Obrácená implikace:** $B \Rightarrow A$

ÚKOL: Dokažte, že formule $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A) \vee B$ je tautologií.

1.2 PREDIKÁTOVÝ POČET

Predikátový počet představuje část matematické logiky, která se zabývá popisem a studiem vnitřní (sémantické) struktury atomárních výroků.

praedicare - lat. vyhlašovat, prohlašovat

Predikátové formule

$$\forall\, x \in R; x^2 + 1 > 0$$

$$\exists\, n \in N; \sqrt{n} \in N$$

Výrazy $x^2+1 > 0$ a $\sqrt{n} \in N$ v uvedených formulích nazýváme **predikáty**.

Důležitou součástí abecedy predikátového počtu jsou **KVANTIFIKÁTORY**.

Obecný (velký) kvantifikátor:

$$\forall\, x \in A \quad \text{...} \quad \text{pro všechna } x \text{ z } A$$

Existenční (malý) kvantifikátor:

$$\exists\, x \in A \quad \text{...} \quad \text{existuje (alespoň jedno) } x \text{ z } A$$

$$\exists!\, x \in A \quad \text{...} \quad \text{existuje právě jedno } x \text{ z } A$$

Negace kvantifikátorů

Pravidla negace kvantifikátorů formulují tzv. de Morganovy zákony pro predikátový počet:

$$\neg(\exists\, x \in A; V(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in A; \neg V(x)$$

$$\neg(\forall\, x \in A; V(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in A; \neg V(x)$$

$$\neg(\exists\, x \in A, \forall\, y \in B; V(x,y)) \Leftrightarrow \forall\, x \in A, \exists\, y \in B; \neg V(x,y)$$

Příklad:

$$\varphi \sim \text{Neexistuje největší reálné číslo}$$

$$\neg\varphi \sim \exists\, y \in R, \forall\, x \in R; x \leq y$$

$$\varphi \sim \forall\, y \in R, \exists\, x \in R; x > y$$

Negace kvantifikace

formule φ	**její negace** $\neg\varphi$
Každý prvek množiny A **má** danou vlastnost	**Aspoň jeden prvek** množiny A **nemá** danou vlastnost
Aspoň jeden prvek množiny A **má** danou vlastnost	**Žádný prvek** množiny A **nemá** danou vlastnost
Množina A **má aspoň** k prvků	**Množina** A **má nejvýše** $k-1$ prvků
Množina A **má nejvýše** k prvků	**Množina** A **má aspoň** $k+1$ prvků

Wasonův výběrový test

PŘÍKLAD 1: Máme čtyři karty takové, že každá má na líci písmeno a na rubu číslici. Tyto karty leží na stole tak, že vidíme A, B, 1, 2.

OTÁZKA: Které karty otočíte, abyste ověřili, že je splněno tvrzení „Pokud je na líci karty samohláska, na rubu je sudé číslo.“?

ŘEŠENÍ:

PŘÍKLAD 2: V restauraci sedí čtyři osoby: starý muž pije neznámý nápoj, puberťák pije neznámý nápoj, člověk neznámého věku pije vodu a člověk neznámého věku pije vodku.

OTÁZKA: Co zkontrolujete, abyste ověřili, že v restauraci je splněno tvrzení „Kdo pije v hostinci alkohol, je zletilý.“?

ŘEŠENÍ:

ZDROJE:

[1] Jan Zrzavý, Za co nás svět trestá, *Lidové noviny*, 17. 7. 2010.

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Wason_selection_task`