1 Soustavy lineárních rovnic

1.1 Základní pojmy

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty z tělesa T (potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Se soustavou (1) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

1.1.1 Maticový zápis soustavy

Užitím uvedených matic můžeme soustavu (1) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{u} = \vec{b},$$

kde $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy. Tyto vektory můžeme chápat také jako matice, pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{u}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (1) jako na **lineární kombinaci sloupcových vektorů matice** A:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + ... + x_n \cdot \overline{a_n} = b.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme soustavy (1) na dva typy:

1) Homogenní soustavy pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$

2) Nehomogenní soustavy pro $\vec{b} \neq \vec{o}$

1.2 Řešitelnost soustavy

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

Věta 1.1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Potom se jeho přidáním k matici tvořené vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ nemůže zvýšit její hodnost, tj. $h(A) = h(A^*)$. Symbolicky zapsáno: $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$.[1]

[1] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v partiích věnovaných pojmu *Vektorový prostor*.

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspoň jedno řešení

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$

$\square$

Příklad 1. *Zjistěte, zda je řešitelná tato soustava*

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\
2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\
3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\
x_2 - x_3 - x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n \ldots$ soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou $n-$tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n \ldots$ soustava má nekonečně mnoho řešení,

(iii) $h(A) \neq h(A^*) \ldots$ soustava nemá řešení.

1.2.1 Cvičení

1. Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 4x + 3y - z &= 7, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 2, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

1.3 Množiny řešení soustav lineárních rovnic

Příklad 2. *Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:*

a)
$$\begin{aligned}\alpha &: 3x + y - z - 7 = 0\\ \beta &: x + 2y - 5z - 15 = 0\\ \gamma &: 3x + 5y + 2z - 9 = 0,\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\alpha &: x + y + z - 5 = 0\\ \beta &: 3x - 2y + z - 3 = 0\\ \gamma &: 4x - y + 2z - 10 = 0,\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\alpha &: x + 2y + z - 1 = 0\\ \beta &: 3x - z - 6 = 0\\ \gamma &: 7x - 4y - 5z - 16 = 0,\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\alpha &: x - 2y + z - 1 = 0\\ \beta &: 2x - 4y + 2z - 2 = 0\\ \gamma &: -5x + 10y - 5z + 5 = 0.\end{aligned}$$

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY

Množina všech řešení **nehomogenní soustavy** lineárních rovnic je **BODOVÝ PROSTOR**.

Prvky bodového prostoru (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 14 - Def. 2.1) nazýváme body. Každý bod, který je řešením nehomogenní soustavy, se dá vyjádřit jako součet jednoho konkrétního bodu a lineární kombinace vektorů (které jsou řešením příslušné homogenní soustavy).

Příklad 3. *Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:*

a)
$$\begin{aligned}\alpha &: 3x + y - z = 0\\ \beta &: x + 2y - 5z = 0\\ \gamma &: 3x + 5y + 2z = 0,\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\alpha &: x + y + z = 0\\ \beta &: 3x - 2y + z = 0\\ \gamma &: 4x - y + 2z = 0,\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\alpha &: x + 2y + z = 0\\ \beta &: 3x - z = 0\\ \gamma &: 7x - 4y - 5z = 0,\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\alpha &: x - 2y + z = 0\\ \beta &: 2x - 4y + 2z = 0\\ \gamma &: -5x + 10y - 5z = 0.\end{aligned}$$

HOMOGENNÍ SOUSTAVY

Množina všech řešení **homogenní soustavy** lineárních rovnic je **VEKTOROVÝ PROSTOR**.

Prvky vektorového prostoru (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 8 - Def. 1.1) nazýváme vektory. Každý vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace skupiny vektorů z téhož prostoru, kterou nazýváme **systém (množina) generátorů** daného vektorového prostoru.

Dimenze vektorového prostoru je číslo, které udává počet lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinací mohou vytvořit každý vektor uvažovaného prostoru. Systém generátorů v.p., který je tvořen lineárně nezávislými vektory se nazývá **báze** vektorového prostoru. Dimenze je tak rovna počtu vektorů báze daného vektorového prostoru.

Příklad 4. *Bod (počátek) má dimenzi 0, přímka dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor má dimenzi 3. Zdůvodněte tato tvrzení.*

Příklad 5. *Řešte dané dané dvojice homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic. Každé řešení náležitě zapište, geometricky interpretujte a rozhodněte, zda se jedná o bodový či vektorový prostor, určete jeho dimenzi.*

a)

$$x + 2y = 0, \qquad x + 2y = 5,$$

b)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -x + y &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -x + y &= -1, \end{aligned}$$

c)

$$x - 3y + 2z = 0, \qquad x - 3y + 2z = 1,$$

d)

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 3y + 2z &= -1 \\ 2x + y - z &= 0, \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12. \end{aligned}$$

1.4 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly. Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení. Pokud je její matice regulární, tj. $h(A) = n$, má jediné - triviální - řešení, kterým je uspořádaná $n-$tice tvořená samými nulami. Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení. Tímto případem se teď budeme zabývat.

Příklad 6. *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Poznámka. Dvě soustavy $A\vec{u} = \vec{o}$, $B\vec{u} = \vec{o}$ jsou ekvivalentní právě když řádkové vektory matic A, B generují stejný podprostor. Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic totiž odpovídají ekvivalentním úpravám odpovídající matice prováděným na jejích řádcích.

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 1.2. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť matice A této soustavy má hodnost $h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

Důkaz. [1]
(1) Nejprve dokážeme, že W_A je podprostorem $\mathbb{R}^n$:
Využijeme následující vlastnosti maticových operací (A, B, C jsou matice, $r \in \mathbb{R}$) spolu s větou o určení podprostoru[2]:

(i) $A(B+C) = AB + AC$,
(ii) $(rA)B = rAB = r(AB)$.

I. $u, v \in W_A; \Rightarrow Au = o$, $Av = o \Rightarrow Au + Av = o \Rightarrow A(u+v) = o \Rightarrow u + v \in W_A$.

II. $u \in W_A, \alpha \in \mathbb{R}; \Rightarrow Au = o \Rightarrow \alpha(Au) = o \Rightarrow A(\alpha u) = o \Rightarrow \alpha u \in W_A$.

(2) Teď dokážeme, že $\dim W_A = n - h(A)$.
Důkaz naznačíme pro případ $n = 3$. Možnost zobecnění bude zřejmá. Využijeme větu o vztahu dimenzí jádra a obrazu homomorfismu. Tu sice ještě nemáme dokázanou, ale to napravíme během tohoto semestru.

Uvažujme homomorfismus

$f(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$.

Pro jeho jádro $\mathrm{Ker} f$ a obraz $\mathrm{Im} f$ zřejmě platí:

$$\mathrm{Ker} f = W_A,$$

$$\mathrm{Im} f = [\{(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})\}],$$

kde dimenze obrazu odpovídá hodnosti matice soustavy A, tj. $\dim \mathrm{Im} f = h(A)$. Potom, podle zmíněné věty, kterou si teprve dokážeme, platí

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \dim \mathrm{Im} f. \tag{4}$$

Dimenze vektorového prostoru neznámých x_1, x_2, x_3 soustavy je v případě uvedeného homomorfismu rovna 3, obecně pak n. Po dosazení $\mathrm{Ker} f = W_A$, $\dim \mathrm{Im} f = h(A)$ a $\dim V = n$ do 4 dostaneme

$$\dim W_A = n - h(A) \tag{5}$$

□

[1] K tomuto důkazu nemáme zatím vytvořen odpovídající pojmový aparát. Až se tak stane, vrátíme se k němu.
[2] Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí: (1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W$, (2) $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W$.

1.4.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 6. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\}]\,.$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 6:

1. Určíme tzv. základní neznámé
Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé ("nezákladní" nebo též "volné" neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{základní nezn.}: \quad x_1, x_2; \qquad \text{volné nezn.}: \quad x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Odpovídající soustava má potom tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A
Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (6) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1,-2,1,0), \quad \vec{b}_2 = (2,-3,0,1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (6) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1,-2,1,0) + t(2,-3,0,1); \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 7. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{7}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2,1,0,0,0),(3,0,5,1,0),(7,0,12,0,1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2,1,0,0,0) + s(3,0,5,1,0) + t(7,0,12,0,1); \quad r,s,t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Poznámka. Z tvrzení věty 1.2 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

1.5 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Ukážeme si, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní. Začneme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (7) z příkladu 7.

Příklad 8. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \tag{9}$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (8) příslušné **homogenní** soustavy (7):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$

Věta 1.3 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť $\vec{v}$ je libovolné řešení nehomogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ platí:*

$$M = \{\vec{v} + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Poznámka. Věta 1.3 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy**.

Důkaz. (1) $\{\vec{v} + \vec{u}\} \subseteq M; \quad A(\vec{v} + \vec{u}) = A\vec{v} + A\vec{u} = A\vec{v} + \vec{o} = A\vec{v} = \vec{b}$

(2) $M \subseteq \{\vec{v} + \vec{u}\}; \quad A\vec{w} = \vec{b}, A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow A(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{o} \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} \in W_A$ tak, že $A\vec{w} = A(\vec{v} + \vec{u}) = \vec{b}$. □

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho $\vec{v}$.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = \vec{v} + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy **netvoří vektorový prostor** (neobsahuje nulový vektor). Jedná se o tzv. **lineární množinu**. Později si ukážeme, že se jedná o afinní bodový podprostor.