

Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic - úlohy k řešení

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U regulárních soustav vyzkoušejte všechny metody, které byste měli znát. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy, pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustavy.

$$(a) \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$
$$\left\{ \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right] \right\}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$
$$\{ [1 - 2t, -1 + t, t] \}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 1 \end{aligned}$$
$$\{ \}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ x - 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{ [1, -2, 1] \}$$

$$(e) \quad \begin{aligned} x - 2y + 2z - w &= 3 \\ 3x + y + 6z + 11w &= 16 \\ 2x - y + 4z + w &= 9 \end{aligned}$$
$$\{ [5 - 2t, 1, t, 0] \}$$

$$(f) \quad \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{ [1, 0, 1] \}$$

$$(g) \quad \begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$
$$\{ [1 + 3s - 2t, s, t] \}$$

$$(h) \quad \begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$
$$\left\{ \left[-\frac{15}{2}, 23, -10 \right] \right\}$$

$$(i) \quad \begin{aligned} x + 2y &= 0 \end{aligned}$$
$$\{ [-2t, t] \}$$

$$(j) \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \end{aligned}$$
$$\{ [3 - 2t, t] \}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(k)} & x - 3y + 2z = 0 \\
 & \{[3s - 2t, s, t]\}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{(l)} & x - 3y + 2z = 3 \\
 & \{[3 + 3s - 2t, s, t]\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(m)} & -x + 2y + z = 0 \\
 & x + y + 2z = 0 \\
 & \{[-t, -t, t]\}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{(n)} & -x + 2y + z = 7 \\
 & x + y + 2z = 12 \\
 & \{[\frac{17}{3} - t, \frac{19}{3} - t, t]\}
 \end{array}$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejich řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

$$\text{(a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array} \right], \quad
 \text{(b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array} \right], \quad
 \text{(c)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right],$$

$$\text{(d)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array} \right], \quad
 \text{(e)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right], \quad
 \text{(f)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array} \right],$$

$$\text{(g)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right], \quad
 \text{(h)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array} \right].$$

ŘEŠENÍ: (a) $\{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]\}$, (b) $\{[-7 - 2t, t, 2]\}$, (c) $\{[-8, 4 + t, 8 + 2t, 1 + t]\}$, (d) $\{[-3 - 11t, -1 - t, 4 + 7t]\}$, (e) $\{[2 - 2s - 5t, s, 1 + t, 2t]\}$, (f) $\{[2t, -8 + 3t, t, 3]\}$, (g) $\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$, (h) $\{[-5 - 3t, 19 - 4t, -6 - 2t, t]\}$.