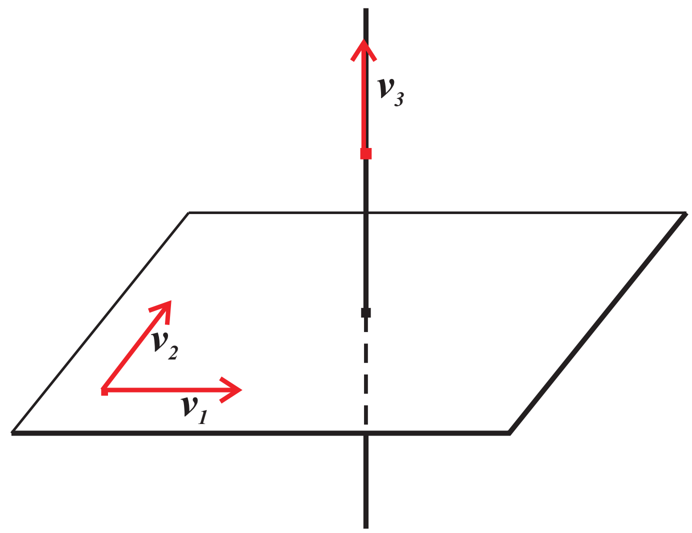
14.3 Kolmost podprostorů

14.3.1 Ortogonální doplněk vektorového prostou

Ve vektorovém prostoru dimenze 3 je ortogonálním doplňkem roviny (přesněji vektorového prostoru dimenze 2) přímka na ní kolmá (vektorový prostor dimenze 1, jehož vektory jsou kolmé na všechny vektory v té rovině) a ortogonálním doplňkem přímky je naopak rovina.



Obrázek 6: $V_1 = [\{\vec{v}_3\}], V_2 = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}], \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1, \vec{v}_2; \quad V_1 = V_2^{\perp}$ a zároveň $V_2 = V_1^{\perp}$

DEFINICE 28 (Ortogonální doplněk vektorového podprostoru).

$$V_k \subseteq\subseteq V_n; \quad V_k \to V_k^{\perp}$$

(Pech:AGLÚ/str.101 - D.5.1)

Věta 56 (Dimenze ortogonálního doplňku). *Je-li V_k podprostor vektorového prostoru V_n. potom ortogonální doplněk $V_k^{\perp}$ vektorového podprostoru V_k je vektorový prostor dimenze $n - k$.*

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

DEFINICE 29 (Kolmost vektoru k podprostoru).

$$\vec{b} \perp V_k$$

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

Věta 57 (Kritérium kolmosti vektoru k podprostoru). *Vektor $\vec{b} \in V_n$ je kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\}$.*

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

DEFINICE 30 (Kolmost podprostorů).

$$V_r \perp V_s$$

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

Poznámka. Rozlišujeme:

- prostory **kolmé**: $V_r \perp V_s$
- prostory **totálně kolmé**: $V_r = V_s^{\perp}$ a $V_s = V_r^{\perp}$

Prostory totálně kolmé jsou zároveň i kolmé. Tvrzení opačné však obecně neplatí. Prostory kolmé nemusí být zároveň totálně kolmé. Uveďte příklad.

PŘÍKLAD 14.8. *Rozhodněte, za jakých podmínek jsou na sebe kolmé podprostory $V_2 = [\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}], V_3 = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}]$*

Řešení: Dle definice 30:
1) existuje $\vec{x} \in V_2$ kolmý k V_3, $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, tj.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{b}_1 &= x_1\vec{a}_1\vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2\vec{b}_1 = 0 \\
\vec{x} \cdot \vec{b}_2 &= x_1\vec{a}_1\vec{b}_2 + x_2\vec{a}_2\vec{b}_2 = 0 \\
\vec{x} \cdot \vec{b}_3 &= x_1\vec{a}_1\vec{b}_3 + x_2\vec{a}_2\vec{b}_3 = 0
\end{aligned}$$

2) existuje $\vec{y} \in V_3$ kolmý k V_2, $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$, tj.

$$\begin{aligned}
\vec{y} \cdot \vec{a}_1 &= y_1\vec{b}_1\vec{a}_1 + y_2\vec{b}_2\vec{a}_1 + y_3\vec{b}_3\vec{a}_1 = 0 \\
\vec{y} \cdot \vec{a}_2 &= y_1\vec{b}_1\vec{a}_2 + y_2\vec{b}_2\vec{a}_2 + y_3\vec{b}_3\vec{a}_2 = 0
\end{aligned}$$

Aby měly obě uvedené soustavy nenulová řešení, musí být hodnost matice

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \vec{a}_1\vec{b}_2 & \vec{a}_1\vec{b}_3 \\ \vec{a}_2\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 & \vec{a}_2\vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

menší než 2. Obecně bychom řekli, že hodnost takovéto matice musí být menší než minimum z dimenzí posuzovaných vektorových prostorů.

DEFINICE 31 (Nutná a postačující podmínka kolmosti dvou podprostorů).

$$V_r \perp V_s \quad \Leftrightarrow \quad h(G) < \min(r, s); \quad G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \vec{a}_1\vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_1\vec{b}_s \\ \vec{a}_2\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_2\vec{b}_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_r\vec{b}_1 & \vec{a}_r\vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_r\vec{b}_s \end{bmatrix}$$

(Pech:AGLÚ/str.103 - V.5.3)

14.4 Orientace vektorového prostoru

PŘÍKLAD 14.9. *Najděte matice přechodu mezi uvedenými (ortonormálními) bázemi vektorového prostoru V_2.*

a) $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

b) $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

Podle znaménka determinantu matice přechodu mezi dvěma bázemi určujeme, zda jsou souhlasné (+), nebo nesouhlasné (-).

DEFINICE 32 (Orientovaný vektorový prostor).

(Pech:AGLÚ/str.105 - D.6.1)

Poznámka. V prostoru dimenze 3 rozlišujeme pravotočivé a levotočivé báze. Konstrukci pravotočivé báze užitím pravidla pravé ruky známe z fyziky.

14.5 Ortogonální doplněk n-1 vektorů

Ortogonálním doplňkem skupiny $n-1$ vektorů rozumíme **jeden vektor**, který je kolmý ke všem $n-1$ vektorům

Jedná se o **zobecnění vektorového součinu**, který známe z prostoru dimenze 3. Vektorový součin bychom tedy mohli nazývat také „ortogonální doplněk 2 vektorů".

14.5.1 Vektorový součin

PŘÍKLAD 14.10. *Coriolisova síla*

$$F_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}.$$

PŘÍKLAD 14.11. *Určete obsah trojúhelníku ABC :*

a) $A = [1, 2, 0],\ B = [3, 0, -3],\ C = [5, 2, 6],$

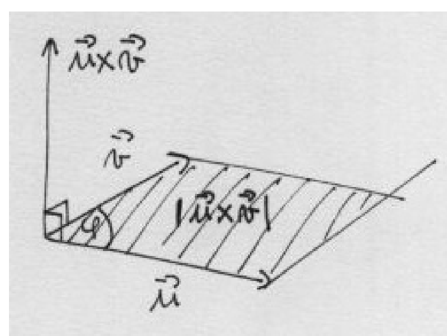
b) $A = [-1, 1],\ B = [3, 3],\ C = [1, 5].$

Vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \tag{22}$$

Norma (velikost) vektorového součinu:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$$



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Úkol: Dokažte, že vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Věta 58 (Vlastnosti vektorového součinu).

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $(c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v}) = c(\vec{u} \times \vec{v})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
4. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}, \vec{v}$ *závislé*
5. $\vec{u}, \vec{v}$ *nezávislé* $\quad \Rightarrow \quad \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ *tvoří kladnou bázi* V_3
6. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$
7. $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix} = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \varphi$

(Pech:AGLÚ/str.111 - V.7.3)

PŘÍKLAD 14.12. *Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC s vrcholy* $A = [7, 3, 4]$, $B = [1, 0, 6]$, $C = [4, 5, -2]$.

Po **normu vektorového součinu** platí následující vztahy:

$$|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha \tag{23}$$

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix} = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \sin \alpha \tag{24}$$

Poznámky.

1. Determinant $\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je tzv. **Gramův determinant** vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

(Pech:AGLÚ/str.111)

2. Vztah $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je speciálním případem tzv. **Lagrangeovy identity**

(Pech:AGLÚ/str.114-115)

14.5.2 Ortogonální doplněk n-1 vektorů v prostoru V_n

DEFINICE 33.

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \end{vmatrix} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + ... + A_n\vec{e}_n$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = (A_1, A_2, ..., A_n)$$

Poznámka. Připomeňme si větu o rozvoji determinantu

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Vlastnosti ortogonálního doplňku

1. Ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}$ je kolmý k vektorům $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$.

2. $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně závislé

3. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé $\quad \Rightarrow \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}\}$ tvoří kladnou bázi V_n

4. Prohozením pořadí dvou vektorů se ortogonální doplněk mění na opačný, tj. mění se znaménko

5. $$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2^2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-2}\vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix} =$$

$\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}) \dots$ Gramův determinant

(Pech:AGLÚ/str.108,109 - V.7.1,V.7.2)