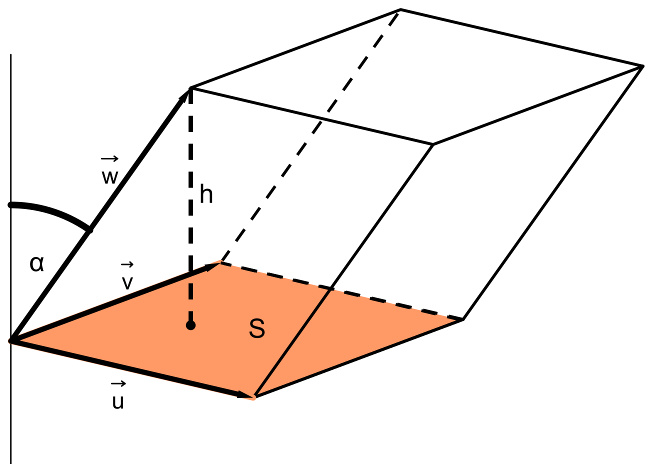
14.6 Vnější (smíšený) součin

ÚKOL: Vyjádřete objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.



$$V = S \cdot h$$
$$S = |\vec{u} \times \vec{v}|$$
$$h = |\vec{w}| \cos \alpha$$

$$V = S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha$$

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{25}$$

Operaci, popsanou rovnostmi (25), nazýváme **vnější součin** (též **smíšený součin**) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Značíme $[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]$.

ÚKOL: Dokažte následující vlastnosti smíšeného součinu:

a) $[a\ b\ c] = [c\ a\ b] = [b\ c\ a] = -[a\ c\ b] = -[b\ a\ c] = -[c\ b\ a]$.

b) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou komplanární.

Rovnice roviny určené třemi body A, B, C:

$$[(X - A)(B - A)(C - A)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

PŘÍKLAD 14.13. *Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, je-li dáno: $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.*

Obsah trojúhelníka umíme spočítat užitím vektorového součinu:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Snadno ukážeme, že lze tento postup uplatnit i pro výpočet obsahu trojúhelníku v rovině. Pro vektorový součin potom platí tyto vztahy:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = (0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}),$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right| = |[\vec{u}\ \vec{v}]|.$$

Pojem smíšeného součinu tak můžeme použít i v rovině, tj. pro dva vektory o dvou složkách. Jeho absolutní hodnotu pak můžeme interpretovat jako obsah rovnoběžníku těmito vektory omezeného. Pro obsah příslušného trojúhelníku platí:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\,|[\vec{u}\ \vec{v}]| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right|.$$

Můžeme použít i zápis, v němž jsou použity přímo souřadnice bodů - vrcholů trojúhelníka. Pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ platí:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}\right|,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\right|. \qquad (26)$$

Poznámka. Srovnejte vzorec (26) s obecnou rovnicí přímky na straně 65. Pokuste se vizuální podobnost těchto vztahů vysvětlit geometricky.

Obsah rovnoběžníku určeného body A, B, C

$A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$:

$$S = \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\| .$$

Obsah rovnoběžnostěnu určeného body A, B, C, D

$A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$:

$$S = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{array} \right\| .$$

DEFINICE 34 (Vnější součin vektorů). *Vnějším součinem vektorů* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$, *které mají v ortonormální bázi* ε *souřadnice* $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = 1, 2, ..., n$, *nazýváme determinant*

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| .$$

Značíme

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n].$$

(Pech:AGLÚ/str.117 - D.8.1)

Zobecnění pojmu **objem rovnoběžnostěnu**

$n = 3$:

$$L_3 = |(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3| = ||\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \cdot |\vec{a}_3| \cdot \cos\varphi| = |\,[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]\,|,$$

$n = 4$:

$$L_4 = |(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_4| = ||\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3| \cdot |\vec{a}_4| \cdot \cos\varphi| = |\,[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4]\,|.$$

Věta 59 (Absolutní objem vektorů).

$$|\,[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4]\,|$$

(Pech:AGLÚ/str.120 - V.8.1)

Pod pojmem „objem rovnoběžnostěnu určeného danými vektory“ rozlišujeme dva případy:

1. Objem rovnoběžnostěnu určeného n vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$:

$$L_n^2 = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n]^2 = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n),$$

kde $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ je Gramův determinant (str. 94).

2. Objem rovnoběžnostěnu určeného k vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k \in V_n$:

$$L_k^2 = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k).$$

(Pech:AGLÚ/str.120 - V.8.2)

PŘÍKLAD 14.14. *Obsah rovnoběžníku $ABCD$ v prostoru dimenze 3.*

$$S^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \det G(\vec{u}, \vec{v}).$$

14.7 Vztahy mezi skalárním, vektorovým a vnějším součinem

Viz **(Pech:AGLÚ/str. 123**