15 Vzdálenost podprostorů

15.1 Vzdálenost bodů

Eukleidovský bodový prostor E_n = afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**. **(Pech:AGLÚ/str.126)**

Definováním skalárního součinu je umožněno měření vzdáleností bodů prostoru. Můžeme proto též říci, že **eukleidovský bodový prostor = afinní bodový prostor + vzdálenost bodů**.

DEFINICE 35 (Vzdálenost bodů). *Vzdálenost dvou bodů $A, B \in E_n$ je rovna normě vektoru $B - A$, tj.:*

$$|AB| = |B - A| = \sqrt{(B - A)^2}.$$

(Pech:AGLÚ/str.126 - D.10.2)

Věta 60 (Vlastnosti vzdálenosti bodů). *Pro $A, B, C \in E_n$:*

1) $|AB| = |BA|$,

2) $|AB| \geq 0$, $|AB| = 0$ *právě když* $A = B$,

3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$ *(Trojúhelníková nerovnost)*

(Pech:AGLÚ/str.126 - V.10.1)

DEFINICE 36 (Kartézská soustava souřadnic).

$$\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\},$$

kde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ je ortonormální báze.

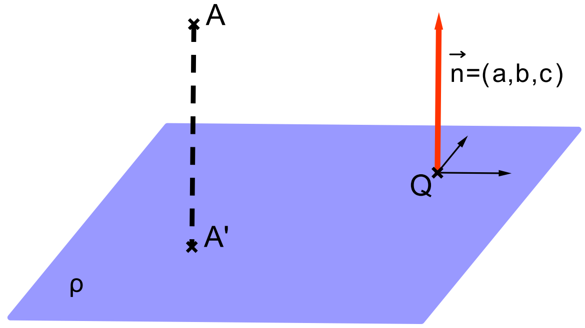
(Pech:AGLÚ/str.127 - D.10.3)

Výhoda ortonormální báze: Pro $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ je

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}.$$

15.2 Vzdálenost bodu od nadroviny

PŘÍKLAD 15.1. *Určete vzdálenost bodu* $A = [3, 6, 1]$ *od roviny* $x + 10y + 7z - 78 = 0$.



Vzdálenost $|A\rho|$ bodu A od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do roviny ρ, tj.

$$|A\rho| = |AA'|.$$

Pro vzdálenost bodu A od roviny ρ, určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$, platí:

$$|A\rho| = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{27}$$

Poznámka. Pravou stranu vztahu (27) pro $|A\rho|$ můžeme interpretovat jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - Q$ do směru vektoru $\vec{n}$.

Stejný vztah jako (27) platí i pro vzdálenost bodu od nadroviny E_{n-1} :

$$|AE_{n-1}| = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{28}$$

(Pech:AGLÚ/str.140 - V.15.1)

15.3 Rovnice nadroviny E_{n-1}

PŘÍKLAD 15.2. *Napište rovnici roviny, která je určená body* $A = [1, -2, 3]$, $B = [-4, 5, 6]$, $C = [7, 8, -9]$.

Neparametrickou rovnici nadroviny v prostoru E_{n-1} můžeme zapsat takto:

$$(x - Q) \cdot \vec{n} = 0, \tag{29}$$

kde Q je bod nadroviny, $\vec{n}$ je vektor kolmý na nadrovinu ($\vec{n} \in V_{n-1}^{\perp}$) a $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ je obecný bod nadroviny. **(Pech:AGLÚ/str.139)**

15.4 Vzdálenost bodu od podprostoru

Věta 61 (Vzdálenost bodu od podprostoru).
(Pech:AGLÚ/str.142 - V.15.2)

Závěr: Vzdálenost bodu A od podprostoru E_k je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do tohoto podprostoru.

PŘÍKLAD 15.3. *V eukleidovském prostoru E_4 je dán bod $B = [7, 6, 11, 0]$ a rovina $\omega : X = M + k\vec{u} + l\vec{v}$, kde $M = [1, 1, 1, 1]$, $\vec{u} = (3, 2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 0)$. Napište vektorovou rovnici kolmice spuštěné z bodu B na rovinu ω a určete její průsečík B' s rovinou ω. Určete vzdálenost bodu B od roviny ω.*

PŘÍKLAD 15.4. *V eukleidovském prostoru E_3 určete vzdálenost bodu $A = [7, 9, 7]$ od přímky $p : x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t; t \in R$.*

Poznámka. Příklad 15.4 buď řešíme stejně jako 15.3, nebo můžeme použít následující vzorec.

Výpočet vzdálenosti bodu od přímky v prostoru E_3:

Pro vzdálenost bodu A od přímky $p : X = Q + t\vec{u}; t \in R$ platí:

$$|Ap| = \frac{|(Q - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \tag{30}$$

ÚKOL: Odvoďte vztah (30).

15.5 Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3

PŘÍKLAD 15.5. *Určete vzdálenost dvou mimoběžek p, q v E_3 :*

$p : X = A + t\vec{u}, A = [-2, -3, 2], \vec{u} = (4, 2, -1),$

$p : X = B + t\vec{v}, B = [1, 6, 2], \vec{v} = (0, 1, -1).$

Vzdálenost $v = |pq|$ dvou mimoběžek je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru (úsečky) $\overrightarrow{AB}$ do směru vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$|pq| = \frac{|(A - B) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \tag{31}$$