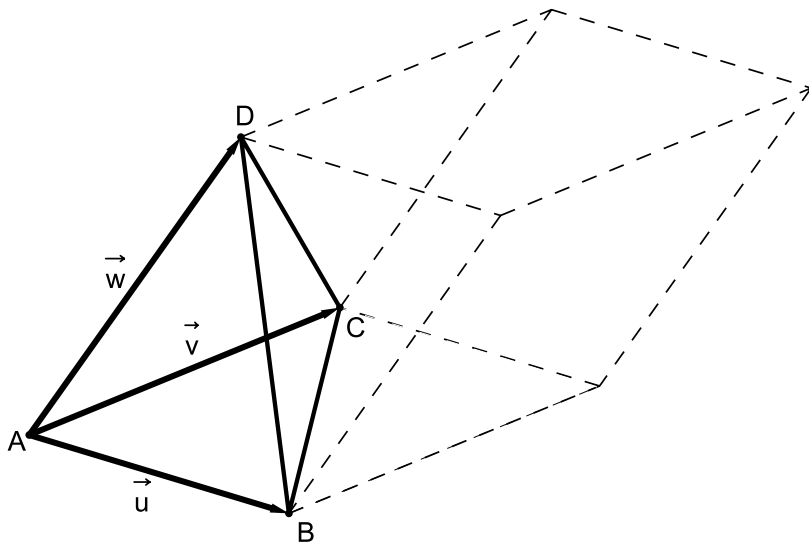


16 Objem simplexu

PŘÍKLAD 16.1. *Určete objem čtyřstěnu s vrcholy $A = [3, 4, 0]$, $B = [9, 5, -1]$, $C = [1, 7, 1]$, $D = [3, 2, 5]$.*

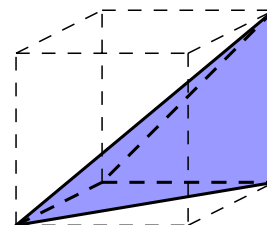
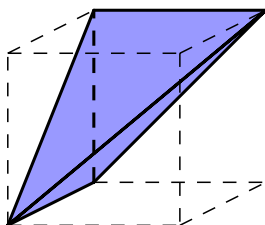
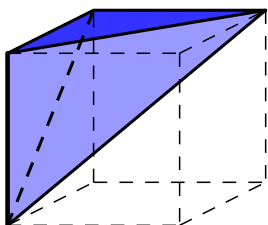
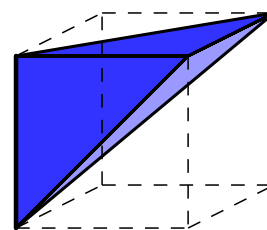
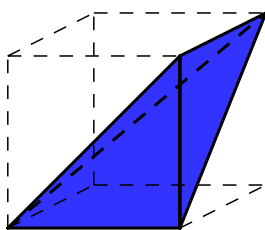
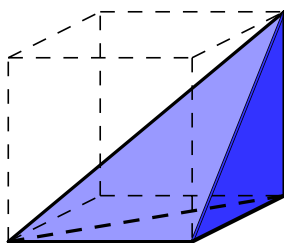


Umíme spočítat objem odpovídajícího rovnoběžnostěnu:

$$V = |[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]| = |[B - A, C - A, D - A]|.$$

Otázkou je, jak souvisí objem čtyřstěnu s objemem rovnoběžnostěnu? Odpověď souvisí s řešením následujícího problému.

PROBLÉM: Na jaký nejmenší počet čtyřstěnu téhož objemu můžeme rozřezat krychli?

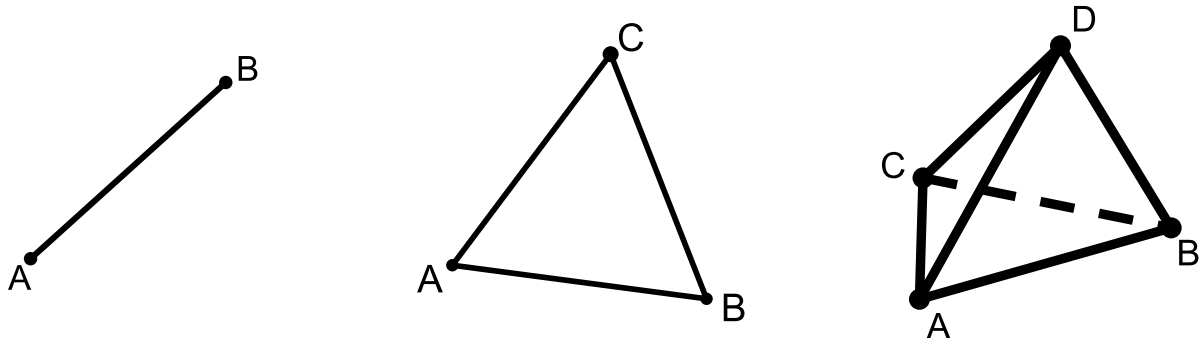


Objem čtyřstěnu $ABCD$:

$$V(A, B, C, D) = \frac{1}{6} |[B - A, C - A, D - A]|.$$

Simplex

„simplex“ = lat. „jednoduchý“



Simplex = konvexní obal $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v A_n . Přitom konvexním obalem množiny bodů rozumíme průnik všech konvexních množin, které tyto body obsahují.

(Pech:AGLÚ/str.128 - D.11.3)

DEFINICE 37 (Objem simplexu). *Objemem simplexu, který je určen $n + 1$ body $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in E_n$, nazýváme číslo:*

$$V(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = \frac{1}{n!} |[A_1 - A_{n+1}, \dots, A_n - A_{n+1}]|.$$

(Pech:AGLÚ/str.129 - D.11.4)

Pro vyjádření objemu simplexu můžeme použít i tento vztah:

$$V(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

E_2 : Obsah trojúhelníku ABC

$$V(A, B, C) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poznámka. Heronův vzorec.

E_3 : Objem čtyřstěnu $ABCD$

$$V(A, B, C, D) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poznámka. Eulerova čtyřbodová relace.

(Pech:AGLÚ/str.135)

17 Odchylka podprostorů

17.1 Odchylka dvou přímek

PŘÍKLAD 17.1. *Určete odchylku dvou přímek p, q :*

$$p : X = A + t\vec{u}; \quad A = [1, 3, -1], \vec{u} = (1, 1, 2),$$

$$q : X = B + s\vec{v}; \quad B = [1, 1, 0], \vec{v} = (3, -2, 1).$$

Odchylka dvou vektorů \vec{u}, \vec{v}

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Odchylka dvou přímek (různoběžek, mimoběžek) se směrovými vektory \vec{u}, \vec{v}

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$