E_3 : **Objem čtyřstěnu** $ABCD$

$$V(A,B,C,D) = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Poznámka. Eulerova čtyřbodová relace.

(Pech:AGLÚ/str.135)

17 Odchylka podprostorů

17.1 Odchylka dvou přímek

PŘÍKLAD 17.1. *Určete odchylku dvou přímek* p, q :

$$p: \ X = A + t\vec{u}; \ A = [1,3,-1], \vec{u} = (1,1,2),$$

$$q: \ X = B + s\vec{v}; \ B = [1,1,0], \vec{v} = (3,-2,1).$$

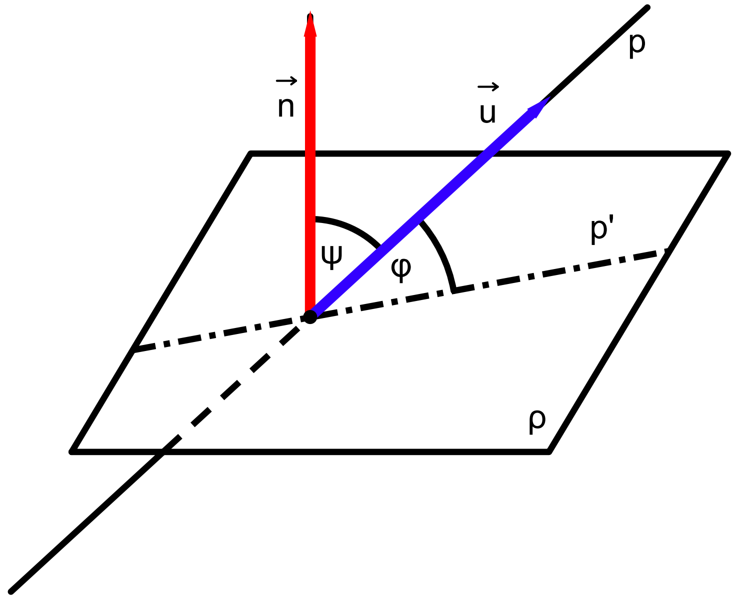
Odchylka dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Odchylka dvou přímek (různoběžek, mimoběžek) se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

17.2 Odchylka přímky od roviny v E_3



Odchylkou přímky p od roviny ρ rozumíme odchylku φ přímky p od jejího kolmého průmětu p' do roviny ρ. Úhel ψ představuje odchylku přímky p od směru normály roviny ρ. Potom platí $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$ a tak ze vztahu pro výpočet odchylky přímky p a normály roviny ρ

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

získáme vztah pro výpočet odchylky přímky a roviny

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|},$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ρ.

PŘÍKLAD 17.2. *Určete odchylku přímky AB od roviny ρ :* $A = [2, 3, -1]$, $B = [3, 7, 4]$, $\rho : 2x - 3y + z + 4 = 0$.

17.3 Kolmý průmět vektoru do podprostoru

Kolmým průmětem vektoru $\vec{u}$ do podprostoru V_k je vektor $\vec{u}' \in V_k$ takový, že

$$\vec{u} - \vec{u}' \perp V_k.$$

(Pech:AGLÚ/str.152 - D.17.3)

Kolmý průmět vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{s}$

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}$$

Kolmý průmět vektoru $\vec{u}$ do podprostoru V_k určeného ortonormální bází $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\}$

$$\vec{u}' = \sum_{i=1}^{k} (\vec{u} \cdot \vec{a}_i)\vec{a}_i$$

(Pech:AGLÚ/str.152 - D.17.1)

Besselova nerovnost

$$|\vec{u}'| \leq |\vec{u}|,$$

nebo též

$$\sum_{1}^{k} (\vec{u} \cdot \vec{a}_i)^2 \leq \vec{u}^2.$$

(Pech:AGLÚ/str.154 - V.17.3)

Směrové kosiny přímky

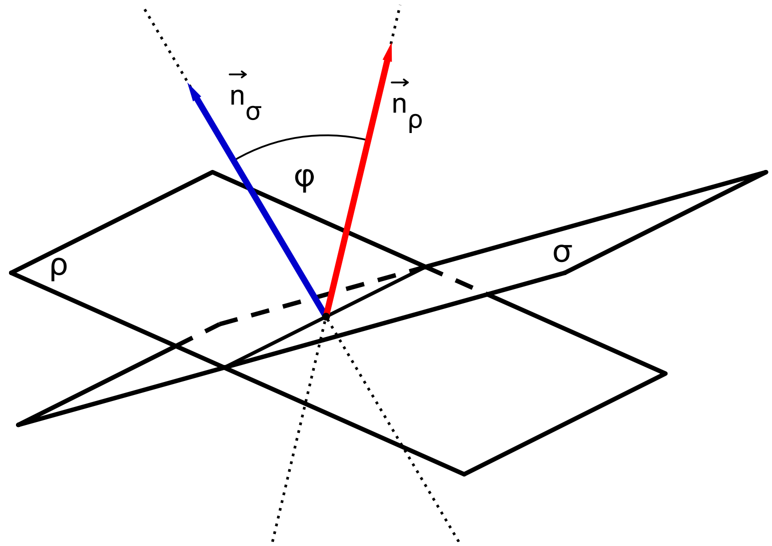
Nechť $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ je ortonormální báze kartézské soustavy souřadnic a $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p. Potom rovnostmi

$$\cos\varphi_i = \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_i}{|\vec{u}|};\ \ i = 1, 2, ..., n$$

jsou dány tzv. **směrové kosiny** $\cos\varphi_i$ přímky p. Platí

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\varphi_i = 1.$$

17.4 Odchylka dvou rovin v E_3



Odchylkou dvou rovin (nadrovin) v E_3 (E_n) rozumíme odchylku jejich normálových přímek (ortogonálních doplňků).

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho||\vec{n}_\sigma|} \tag{32}$$

Uvažujme roviny $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$, $\sigma = [B; \vec{w}, \vec{z}]$. Potom pro výpočet jejich odchylky φ můžeme modifikovat vzorec (32) na tvar:

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z})|}{|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w} \times \vec{z}|}$$

PŘÍKLAD 17.3. *V prostoru E_3 určete odchylku φ daných podprostorů E_2', E_2'':*

$$E_2' = [A, \vec{u}, \vec{v}];\ \ A = [1,0,0], \vec{u} = (1,1,2), \vec{v} = (3,1,1),$$

$$E_2'' : x - 2y + 1 = 0.$$

PŘÍKLAD 17.4. *V eukleidovském prostoru E_5 určete odchylku nadrovin ω, ρ :*

$$\omega : x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 3 = 0,$$

$$\rho : -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 7 = 0.$$