10.5 Ortogonální doplněk n-1 vektorů

Ortogonálním doplňkem skupiny $n-1$ vektorů rozumíme **jeden vektor**, který je kolmý ke všem $n-1$ vektorům

Jedná se o **zobecnění vektorového součinu**, který známe z prostoru dimenze 3. Vektorový součin bychom tedy mohli nazývat také „ortogonální doplněk 2 vektorů".

10.5.1 Vektorový součin

PŘÍKLAD 10.10. *Coriolisova síla*

$$F_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}.$$

PŘÍKLAD 10.11. *Určete obsah trojúhelníku* ABC :

a) $A = [1, 2, 0]$, $B = [3, 0, -3]$, $C = [5, 2, 6]$,

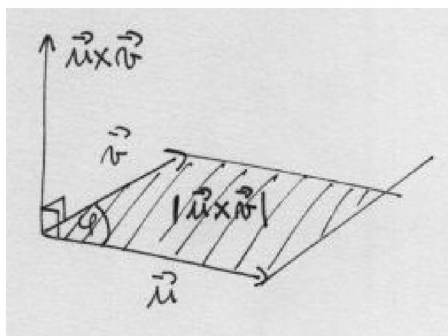
b) $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.

Vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \tag{32}$$

Norma (velikost) vektorového součinu:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$$



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Úkol: Dokažte, že vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Věta 61 (Vlastnosti vektorového součinu)**.**

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

2. $(c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v}) = c(\vec{u} \times \vec{v})$

3. $(\vec{u}+\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

4. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}, \vec{v}$ *závislé*

5. $\vec{u}, \vec{v}$ *nezávislé* $\quad \Rightarrow \quad \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ *tvoří kladnou bázi* V_3

6. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

7. $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix} = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \varphi$

(Pech:AGLÚ/str.111 - V.7.3)

PŘÍKLAD 10.12. *Vypočtěte obsah trojúhelníku* ABC *s vrcholy* $A = [7, 3, 4]$, $B = [1, 0, 6]$, $C = [4, 5, -2]$.

Po **normu vektorového součinu** platí následující vztahy:

$$|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha \tag{33}$$

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix} = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \sin^2 \alpha \tag{34}$$

Poznámky.

1. Determinant $\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je tzv. **Gramův determinant** vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

(Pech:AGLÚ/str.111)

2. Vztah $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je speciálním případem tzv. **Lagrangeovy identity**

(Pech:AGLÚ/str.114-115)

10.5.2 Ortogonální doplněk n-1 vektorů v prostoru V_n

Definice 33.

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \end{vmatrix} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + ... + A_n\vec{e}_n$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = (A_1, A_2, ..., A_n)$$

Poznámka. Připomeňme si větu o rozvoji determinantu

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

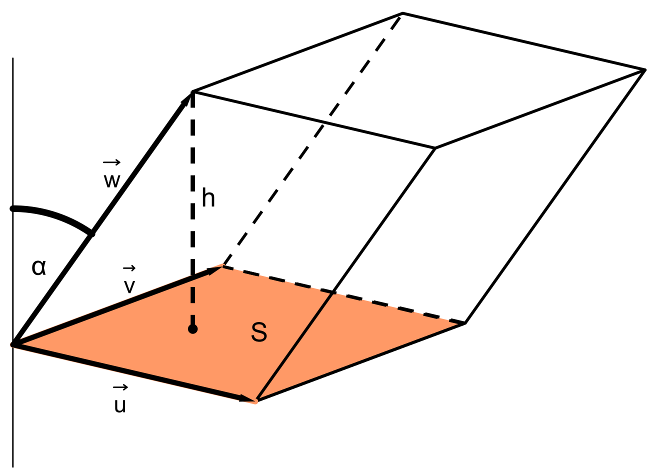
Vlastnosti ortogonálního doplňku

1. Ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}$ je kolmý k vektorům $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$.
2. $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně závislé
3. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé $\quad \Rightarrow \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}\}$ tvoří kladnou bázi V_n
4. Prohozením pořadí dvou vektorů se ortogonální doplněk mění na opačný, tj. mění se znaménko
5. $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times ... \times \vec{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2^2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-2}\vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix} = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1})$
   … Gramův determinant

(Pech:AGLÚ/str.108,109 - V.7.1,V.7.2)

10.6 Vnější (smíšený) součin

ÚKOL: Vyjádřete objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.



$$V = S \cdot h$$
$$S = |\vec{u} \times \vec{v}|$$
$$h = |\vec{w}| \cos \alpha$$

$$V = S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha$$

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{35}$$

Operaci, popsanou rovnostmi (35), nazýváme **vnější součin** (též **smíšený součin**) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Značíme $[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]$.

ÚKOL: Dokažte následující vlastnosti smíšeného součinu:

a) $[a\ b\ c] = [c\ a\ b] = [b\ c\ a] = -[a\ c\ b] = -[b\ a\ c] = -[c\ b\ a]$.

b) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou komplanární.

Rovnice roviny určené třemi body A, B, C:

$$[(X - A)(B - A)(C - A)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

PŘÍKLAD 10.13. *Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, je-li dáno:* $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.

Obsah trojúhelníka umíme spočítat užitím vektorového součinu:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Snadno ukážeme, že lze tento postup uplatnit i pro výpočet obsahu trojúhelníku v rovině. Pro vektorový součin potom platí tyto vztahy:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = (0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}),$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right| = |[\vec{u}\ \vec{v}]|.$$

Pojem smíšeného součinu tak můžeme použít i v rovině, tj. pro dva vektory o dvou složkách. Jeho absolutní hodnotu pak můžeme interpretovat jako obsah rovnoběžníku těmito vektory omezeného. Pro obsah příslušného trojúhelníku platí:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\,|[\vec{u}\ \vec{v}]| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|.$$

Můžeme použít i zápis, v němž jsou použity přímo souřadnice bodů - vrcholů trojúhelníka. Pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ platí:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{array} \right\|,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\|. \tag{36}$$

Poznámka. Srovnejte vzorec (36) s obecnou rovnicí přímky na straně 69. Pokuste se vizuální podobnost těchto vztahů vysvětlit geometricky.

Obsah rovnoběžníku určeného body A, B, C

$A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$:

$$S = \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\|.$$

Objem rovnoběžnostěnu určeného body A, B, C, D

$A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$:

$$S = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{array} \right\|.$$

Definice 34 (Vnější součin vektorů)**.** *Vnějším součinem vektorů* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$, *které mají v ortonormální bázi* ε *souřadnice* $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = 1, 2, ..., n$, *nazýváme determinant*

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|.$$

Značíme

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n].$$

(Pech:AGLÚ/str.117 - D.8.1)

Zobecnění pojmu **objem rovnoběžnostěnu**

$n = 3$:

$$L_3 = |(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3| = ||\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \cdot |\vec{a}_3| \cdot \cos\varphi| = |\,[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]\,|,$$

$n = 4$:

$$L_4 = |(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_4| = ||\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3| \cdot |\vec{a}_4| \cdot \cos\varphi| = |\,[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4]\,|.$$

Věta 62 (Absolutní objem vektorů).

$$|\,[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4]\,|$$

(Pech:AGLÚ/str.120 - V.8.1)

Pod pojmem „objem rovnoběžnostěnu určeného danými vektory" rozlišujeme dva případy:

1. Objem rovnoběžnostěnu určeného n vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V_n$:

$$L_n^2 = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n]^2 = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n),$$

kde $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ je Gramův determinant (str. 94).

2. Objem rovnoběžnostěnu určeného k vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k \in V_n$:

$$L_k^2 = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k).$$

(Pech:AGLÚ/str.120 - V.8.2)

PŘÍKLAD 10.14. *Obsah rovnoběžníku ABCD v prostoru dimenze 3.*

$$S^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \det G(\vec{u}, \vec{v}).$$

10.7 Vztahy mezi skalárním, vektorovým a vnějším součinem

Viz **(Pech:AGLÚ/str. 123**