5 Vektorový prostor

Příklad: Množina všech vektorů v rovině (v prostoru), jak je známe ze středoškolské geometrie.

DEFINICE 3. *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme* **vektorovým prostorem nad tělesem** T, *právě když jsou na V definovány dvě operace:*

i) **sčítání:** *libovolné dvojici $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$,*

ii) **násobení prvkem z tělesa T (skalárem):** *výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$,*

které splňují následující vlastnosti:

a) *Struktura $(V, +)$ je* **komutativní grupa**.

b) **Distributivnost**:

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u},$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

c) *Existence* **jednotkového prvku skalárního násobení**:

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

Poznámky:

1. Prvky množiny V nazýváme **vektory**.

2. Vektor $\vec{o}$, tj. nulový prvek grupy $(V, +)$, nazýváme **nulový vektor**.

3. Vektor $-\vec{u}$ nazýváme **opačný vektor k vektoru** $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}.$$

4. Prvky tělesa T se nazývají **skaláry**.

Některé důsledky definice vektorového prostoru:

a) $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$,

b) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$,

c) $c \cdot \vec{o} = \vec{o}$,

d) $c \cdot \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow c = 0 \vee \vec{v} = \vec{o}$.

Příklady vektorových prostorů

1. Vektory v rovině a v prostoru z elementární geometrie.

2. Samotné těleso T spolu s operacemi „+, ·“ definovanými na T tvoří vektorový prostor nad tělesem T.

3. Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

4. Prostor F_X všech reálných (komplexních) funkcí na nějaké množině X (nad tělesem $\mathbb{R}$).

5. Množina $C_{\langle a,b\rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

6. Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Poznámka: Vektorový prostor V nad tělesem T někdy značíme takto:

$$(V, +, T).$$

Příklad: Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.

Příklad: Ukažte, že množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem, definovanými následujícím způsobem, je vektorový prostor:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

Poznámky:

1. Jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel.

2. Tento prostor můžeme reprezentovat prostřednictvím bodů v rovině, kterou opatříme soustavou souřadnic.

ÚKOL: Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.