2 Vybrané algebraické struktury

Vlastnosti početní operace (např. sčítání, odčítání, násobení a dělení) prováděné s nějakými čísly závisí na množině, z níž tato čísla pocházejí. Liší se vlastnosti operace sčítání na množině přirozených čísel a na množině celých čísel, liší se vlastnosti dělení na množině celých čísel a na množině racionálních čísel apod. Má proto smysl hovořit o operaci ve spojení s množinou, na jejíž prvcích operaci provádíme.

Algebraickou strukturou rozumíme množinu spolu s jednou nebo i více operacemi, které jsou na ní (neomezeně) definované. Zapisujeme $(M, *)$ nebo $(K, \diamond, \circ)$, kde M, K jsou množiny a $*, \diamond, \circ$ jsou operace na nich definované ($*$ je operace na M a $\diamond$ spolu s $\circ$ jsou operacemi na K).

Příklady algebraických struktur

- Množina celých čísel (Z) spolu s operací sčítání $(+)$:
$$(Z, +).$$
- Množina reálných čísel (R) spolu s operacemi sčítání $(+)$ a násobení $(\cdot)$:
$$(R, +, \cdot).$$
- Množina $M_{2\times2}$ čtvercových matic typu $(2, 2)$ (tj. druhého řádu) spolu s operací násobení matic $(\cdot)$:
$$(M_{2\times2}, \cdot).$$
- Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic $n-$tého řádu spolu s operací násobení matic $(\cdot)$:
$$(M_{n\times n}, \cdot).$$
- Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operacemi sčítání $\oplus$ a násobení $\otimes$ na hodinovém ciferníku:
$$(M, \oplus, \otimes).$$

GRUPA, KOMUTATIVNÍ (ABELOVA) GRUPA

PŘÍKLAD 2.1. *Určete vlastnosti algebraické struktury* $(Z, +)$.

Definice 1. *Grupou* $(M, *)$ *rozumíme množinu* M *spolu s operací* $*$ *na* M, *která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall\, x, y \in M;\ x * y \in M,$
Operace $*$ *je neomezeně definovaná na* M.
(Množina M *je uzavřená vzhledem k operaci* $*$.)

ii) $\forall\, x, y, z \in M;\ x * (y * z) = (x * y) * z,$
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists\, e \in M, \forall\, x \in M;\ x * e = e * x = x,$
Existuje neutrální prvek vzhledem k $*$.
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)

iv) $\forall\, x \in M, \exists y \in M;\ x * y = y * x = e.$
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $*$.
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)

Je-li struktura $(M, *)$ *navíc* **komutativní**, *nazývá se* **komutativní grupa** *nebo též* **Abelova grupa**.

Příklady grup:

- $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$, $(C, +)$,
- $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$,
- Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

∘	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

TĚLESO

PŘÍKLAD 2.2. *Určete vlastnosti algebraické struktury* $(R, +, \cdot)$.

Těleso je algebraickou strukturou, jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura* $(T, +, \cdot)$ *se nazývá* **těleso**, *právě když je* $(+, \cdot)$*-distributivní, když struktura* $(T, +)$ *je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura* $(T - \{0\}, \cdot)$, *kde* 0 *je nulový prvek grupy* $(T, +)$, *je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa* T*). Je-li navíc grupa* $(T - \{0\}, \cdot)$ *komutativní, nazývá se* T **komutativní těleso**.

Příklady těles:

- $(Q, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$, $(C, +, \cdot)$.