Grupa. Těleso. Vektorový prostor.

Úkol 1: Rozhodněte, zda je množina regulárních matic spolu s operací sčítání matic grupou.

Úkol 2: Tentokrát uvažujme množinu regulárních matic spolu s operací násobení matic. Je grupou?

Úkol 3: Porovnejte vlastnosti struktury $(Z, +, \cdot)$ s definicí tělesa a rozhodněte, zda je tělesem.

Úkol 4: Ukažte, že následující množiny jsou vektorovými prostory:

a) Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

b) Množina $F_{\langle a,b \rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

c) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

d) Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.

Úkol 5: Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

Úkol 6: Nechť ρ_1, ρ_2 jsou roviny v $\mathbb{R}^3$ definované rovnicemi $3x+2y-5z = 0$, resp. $3x+2y-5z = 1$. Ukažte, že ρ_1 je vektorovým prostorem, zatímco ρ_2 nikoliv.

DOMÁCÍ ÚKOL

Ukažte, že $\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ je vektorovým prostorem dimenze 3. Najděte bázi tohoto prostoru.