ÚKOL: Uvažujte množinu vektorů $M = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří její lineární obal. Ověřte, zda to není vektorový prostor. Jaký je vztah $[M]$ k aritmetickému vektorovému prostoru R^3?

5.4 Podprostor vektorového prostoru

DEFINICE 8. *Nechť V je vektorový prostor nad T. Řekneme, že W je* **podprostor** *vektorového prostoru V, právě tehdy když platí:*

1. $W \subseteq V$,

2. *operace sčítání vektorů $\vec{u} + \vec{v}$ a násobení skalárem $a\vec{u}$ definované v množině W jsou zúžením (restrikcí) těchto operací z prostoru V na množinu W (tj. v obou množinách mají stejné výsledky),*

3. *množina W je vektorovým prostorem nad T (tj. splňuje definici 3 vektorového prostoru).*

Značíme $W \subseteq\subseteq V$.

PŘÍKLAD: $V = R^2$, $T = R$; $W = \{(x,y) \in R^2; y = 3x\}$.

Nutná podmínka existence vektorového podprostoru: Vektorový podprostor musí obsahovat nulový vektor z (nad)prostoru V.

Poznámky:

1. „Nejmenším“ podprostorem je tzv. **triviální vektorový prostor** $\{\vec{o}\}$.

2. „Největším“ podprostorem je prostor V samotný.

Je nutné při určování podprostoru ověřovat celou definici?

Věta 3 (O určení podprostoru.). *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W$,

2. $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W$.

Příklad: Ověřte, zda $W_i \subseteq\subseteq (R^3, +, R)$:

a) $W_1 = \{[r, 2r, 5r]; r \in R\}$,

b) $W_2 = \{[r, 2r, r^2]; r \in R\}$,

c) $W_3 = \{[r, 2r, 1]; r \in R\}$.

ÚKOL: Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory prostoru R^3 nad $\mathbb{R}$.

a) Množina všech řešení (x, y, z) homogenní lineární rovnice

$$3x + 2y - z = 0.$$

b) Množina všech vektorů, které jsou lineární kombinací vektorů

$$\vec{v}_1 = (2, -3, 0),\ \vec{v}_2 = (1, 0, 3).$$

Pokuste se o geometrickou interpretaci daných množin (podprostorů).

Příklad: Rozhodněte, **zda platí** uvedená tvrzení o lineárním obalu množiny M :

1. $M = \{[2, 1]\}$ potom $[M] = R^2$,
2. $M = \{[2, 1], [1, 3]\}$ potom $[M] = R^2$,
3. $M = \{[2, 1], [4, 2]\}$ potom $[M] = R^2$,
4. $M = \{[1, 2], [3, 4], [1, 1]\}$ potom $[M] = R^2$,
5. $M = \{f(x) = 3]\},\ V = \{f(x) = c; c \in R\}$ potom $[M] = V$,
6. $M = \{[1, -1, 1], [6, 1, 3], [-2, 0, -1]\}$ potom $[M] = R^3$,
7. $M = \{[1, -1, 1], [6, 1, 3], [8, -1, 5]\}$ potom $[M] = R^3$.

OTÁZKA: Co se stane, když do systému generátorů přidáme (nebo z něj odebereme) vektor?

ÚKOL: Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:
Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n, \vec{u} \in V$;

a) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V \quad \Longrightarrow \quad [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n, \vec{u}] = V,$

b) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V \quad \Longrightarrow \quad [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_{n-1}] = V.$

Jaké jsou možnosti pro přidání vektoru (ad a) a odebrání vektoru (ad b)?

ad a)

i) Přidáme vektor $\vec{u} \in V$.
ii) Přidáme vektor $\vec{u} \notin V$.

ad b)

i) Odebereme vektor $\vec{u}$, který **je** lineární kombinací zbývajících vektorů.
ii) Odebereme vektor $\vec{u}$, který **není** lineární kombinací zbývajících vektorů.