

## 4 Steinitzova věta o výměně

Tato věta je pro nás důležitá hlavně svými důsledky. Plynou z ní například tyto skutečnosti:

**Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.**

**Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.**

**Příklad:** Množina  $M$  je systémem generátorů příslušného vektorového prostoru. Je možné nahradit některé vektory z  $M$  vektory z množiny  $N$  tak, aby výsledná množina opět generovala ten samý vektorový prostor?

a)  $M = \{(1, 2), (0, 2), (1, 1)\}$ ,  $N = \{(1, 0)\}$ ,

b)  $M = \{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (0, 2, 4), (1, 0, 1)\}$ ,  $N = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ ,

c)  $M = \{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (0, 2, 4), (1, 0, 1)\}$ ,  $N = \{(0, 1, 2), (2, 0, 2)\}$ .

**Věta 14** (Steinitzova věta o výměně). *Nechť  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $T$ . Nechť  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  je množina generátorů prostoru  $V$  a nechť  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  jsou libovolné lineárně nezávislé vektory z  $V$ . Potom platí:*

1)  $k \leq n$ ,

2) *při vhodném přechislování vektorů  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  mohu prvních  $k$  z nich nahradit vektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  tak, že množina*

*$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{u}_{k+2}, \dots, \vec{u}_n\}$  je systémem generátorů vektorového prostoru  $V$ .*

### 4.1 Důsledky Steinitzovy věty o výměně

**Věta 15.** Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru  $V$  mají též počet prvků.

**Věta 16.** Každá skupina lineárně nezávislých vektorů libovolného vektorového prostoru generovaného  $n$ -prvkovou množinou obsahuje nejvýše  $n$  vektorů.

**Věta 17.** Je-li  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  báze vektorového prostoru  $V$  a jsou-li vektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  lineárně nezávislé, je množina  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  rovněž báze vektorového prostoru  $V$ .

**Věta 18.** *Nechť  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  je množina generátorů vektorového prostoru  $V$ , pak*

$$\dim V \leq n.$$

**Věta 19.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor dimenze  $n > 0$  ( $\dim V = n > 0$ ), pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *vektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  jsou lineárně nezávislé,*
2. *vektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  generují prostor  $V$ ,*
3. *vektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  tvoří bázi prostoru  $V$ ,*