3.4 Podprostor vektorového prostoru

Definice 8. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Řekneme, že W je* **podprostor** *vektorového prostoru V, právě tehdy když platí:*

1. W **je neprázdná podmnožina** V *($W \subseteq V \wedge W \neq \emptyset$.)*

2. W **je vektorovým prostorem** *vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem z tělesa T, které jsou definované na V (tj. splňuje definici 3 vektorového prostoru).*

Skutečnost, že W je podprostorem vektorového prostoru V značíme takto:

$$W \subseteq\subseteq V.$$

PŘÍKLAD: $V = R^2$, $T = R$; $W = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$.

Nutná podmínka existence vektorového podprostoru: Vektorový podprostor musí obsahovat nulový vektor z (nad)prostoru V.

Poznámky:
1. „Nejmenším“ podprostorem je tzv. **triviální vektorový prostor** $\{\vec{o}\}$.

2. „Největším“ podprostorem je prostor V samotný.

Je nutné při určování podprostoru ověřovat celou definici?

Věta 6 (O určení podprostoru.). *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W,$

2. $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W.$

PŘÍKLAD 3.9. *Ověřte, zda $W_i \subseteq\subseteq (R^3, +, R)$:*

a) $W_1 = \{[r, 2r, 5r]; r \in R\}$,

b) $W_2 = \{[r, 2r, r^2]; r \in R\}$,

c) $W_3 = \{[r, 2r, 1]; r \in R\}$.

PŘÍKLAD 3.10. *Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory prostoru R^3 nad $\mathbb{R}$.*

a) *Množina všech řešení (x, y, z) homogenní lineární rovnice*

$$3x + 2y - z = 0.$$

b) *Množina všech vektorů, které jsou lineární kombinací vektorů*

$$\vec{v}_1 = (2, -3, 0),\ \vec{v}_2 = (1, 0, 3).$$

Pokuste se o geometrickou interpretaci daných množin (podprostorů).

PŘÍKLAD 3.11. *Rozhodněte,* **zda platí** *uvedená tvrzení o lineárním obalu množiny M :*

1. $M = \{[2,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

2. $M = \{[2,1],[1,3]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

3. $M = \{[2,1],[4,2]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

4. $M = \{[1,2],[3,4],[1,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,

5. $M = \{f(x) = 3\},\ V = \{f(x) = c; c \in R\}$ *potom* $[M] = V$,

6. $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[-2,0,-1]\}$ *potom* $[M] = R^3$,

7. $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[8,-1,5]\}$ *potom* $[M] = R^3$.

OTÁZKA: Co se stane, když do systému generátorů přidáme (nebo z něj odebereme) vektor?

ÚKOL: Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Nechť $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ a $W \subseteq\subseteq V_3$;

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}] = W \quad \Longrightarrow \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = W,$$
$$\text{b) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = W \quad \Longrightarrow \quad [\vec{u}, \vec{v}] = W.$$

Jaké jsou možnosti pro přidání vektoru (ad a) a odebrání vektoru (ad b)? Načrtněte možné situace.

ad a)

i) Přidáme vektor $\vec{u} \in W$.
ii) Přidáme vektor $\vec{u} \notin W$.

ad b)

i) Odebereme vektor $\vec{u}$, který **je** lineární kombinací zbývajících vektorů.
ii) Odebereme vektor $\vec{u}$, který **není** lineární kombinací zbývajících vektorů.

ÚKOL: Poznatky získané řešením předchozího úkolu využijte k formulování podmínek, za nichž platí následující implikace:

Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n, \vec{u} \in V, \quad W \subseteq\subseteq V$;

a) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = W \qquad \Longrightarrow \qquad [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n, \vec{u}] = W,$

b) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = W \qquad \Longrightarrow \qquad [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_{n-1}] = W.$

3.5 Báze vektorového prostoru

Definice 9. *Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá* **báze vektorového prostoru** V, *právě když:*

1. $[M] = V$ *(tj. M je množinou generátorů prostoru V),*

2. M *je* **lineárně nezávislá** *množina.*

Věta 7. *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát* **právě jedním způsobem** *jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj.*

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in M, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in T;\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i.$$

Věta 8 (Alternativní definice lineární nezávislosti)**.** *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru V. Pak M je* **lineárně nezávislá** *právě tehdy, když žádný z vektorů množiny M není lineární kombinací ostatních vektorů M.*

3.6 Dimenze vektorového prostoru

Definice 10. *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má* **konečnou dimenzi**, *jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V (tj. V je konečně generovaný).* **Dimenzí** *vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Značíme*

$$\dim V = n \qquad \text{nebo} \qquad V_n.$$

Například informaci o tom, že vektorový prostor V má dimenzi 3 zapíšeme ve tvaru rovnosti: $\dim V = 3$, nebo zkráceně pomocí dolního indexu: V_3.

Věta 9 (O existenci báze)**.** *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor má* **aspoň jednu konečnou bázi**.

Důsledek 4. *Odstraníme-li ze systému generátorů vektorového prostoru V vektor, který je lineární kombinací ostatních, pak množina zbývajících vektorů je opět systémem generátorů vektorového prostoru V.*

PŘÍKLAD 3.12. *Rozhodněte, zda je daná množina vektorů systémem generátorů, nebo přímo bází, vektorového prostoru R^3.*

a) $(1, 2, 3), (1, 2, 1), (-1, 1, 0), (2, -1, 0)$,

b) $(1, 2, 3), (1, 2, 1), (0, 0, 2), (1, 2, -1)$.

3.7 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Dle věty 7 lze vektor $\vec{u} \in V$ psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ vektorového prostoru V. Jinak řečeno, koeficienty $x_1, x_2, ..., x_n \in T$ lineární kombinace

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

jsou pro daný vektor $\vec{u}$ a danou bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ určeny jednoznačně. Tyto koeficienty, respektive jejich vektor, nazýváme souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M.

Definice 11. *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý vektor $\vec{u} \in V$ lze napsat jednoznačně ve tvaru*

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ nazveme souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M a značíme

$$\{\vec{u}\}_M = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

PŘÍKLAD 3.13. *Množina $M = \{(1,1), (2,3)\}$ je bází vektorového prostoru R^2. Potom pro vektor $\vec{u} = (7, 12) \in R^2$ platí*

$$\vec{u} = -3(1,1) + 5(2,3).$$

Tedy souřadnice vektoru $\vec{u} = (7, 12)$ vzhledem k bázi M jsou $(-3, 5)$. Píšeme takto:

$$\{\vec{u}\}_M = (-3, 5).$$

Poznámka: Nabízí se otázka, vzhledem k jaké bázi jsou uvažovány ostatní souřadnice vektorů z uvedeného příkladu. Jedná se o tzv. **kanonickou bázi**.

V případě vektorového prostoru R^2 je kanonickou bází množina

$$\{(1,0),(0,1)\}.$$

Pro R^3 je potom kanonickou bází množina vektorů

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

atd.

ÚKOL: Ověřte, že vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru R^4. Potom určete souřadnice vektoru

$$\vec{x} = (4,-2,1,5)^T$$

vzhledem k této bázi.

Poznámka: Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k dané bázi je příkladem **izomorfismu**, tj. lineárního zobrazení, které je vzájemně jednoznačné.

Věta 10. *Nechť M je báze vektorového prostoru V. Potom zobrazení*

$$f : V \mapsto T^n$$

definované vztahem

$$f(\vec{u}) = \{\vec{u}\}_M$$

je **izomorfismus**.