Báze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi. Spojení podprostorů.

Příklad 1: Rozhodněte, zda je daná množina vektorů M_i bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, určete souřadnice vektoru $\vec{a} = (1, -2, 5)$ vzhledem k této bázi. Pokud ne, uveďte, jaký vektorový podprostor daná množina generuje.

a) $M_1 = \{(-1, 0, 2), (3, 1, -1), (2, 1, 1)\}$, **b)** $M_2 = \{(2, 1, 2), (1, 1, -1), (2, 1, 1)\}$,

c) $M_3 = \{(5, 0, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 2)\}$, **d)** $M_4 = \{(2, -4, 6), (-1, 2, -3), (4, -8, 12)\}$,

e) $M_5 = \{(1, 2, 0, 1), (2, 0, 1, -3), (1, 1, 1, 1)\}$, **f)** $M_6 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,

g) $M_7 = \{(1, 2), (-1, 5), (1, 1)\}$.

Příklad 2: Jsou uvedené polynomy bází vektorového prostoru polynomů stupně nejvýše 2?

a) $1 - 3x + 2x^2,\ 1 + x + 4x^2,\ 1 - 7x$,

b) $4 + 6x + x^2,\ -1 + 4x + 2x^2,\ 5 + 2x - x^2$.

Příklad 3: Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina $M = x + 1,\ x - 1,\ (x + 1)^2,\ (x + 1)^3$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$ vzhledem k této bázi.

Příklad 4: Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina polynomů $M = \{x^3 + 2x^2 + 1, x^3 + x^2 + x, x^3 + 1, x^2 + 1\}$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ vzhledem k této bázi.

Příklad 5: Vytvořte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1, 2, 0, 1, 2)$, $(2, 3, -1, 5, 4)$, $(-1, 0, -2, 0, 1)$. Potom určete souřadnice vektoru $(2, 1, 1, 0, 1)$ vzhledem k této, vámi vytvořené, bázi.

Příklad 6: Najděte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1, 2, 0, 1, 2)$, $(2, 5, -1, 8, 4)$, $(-1, 0, -2, 3, -1)$.

Příklad 7: Najděte bázi vektorového prostoru V, která obsahuje daný vektor $\vec{u}$:

a) $V = [(1, 2, 3, -1), (1, 0, 1, -2), (-2, 1, 4, 3)]$, $\vec{u} = (1, 1, 7, -3)$,

b) $V = [(2, 1, 0, 1), (-1, 1, 2, 3), (2, 3, 4, 0)]$, $\vec{u} = (4, 1, 0, -6)$.

Příklad 8: Pokud jsou W_1 a W_2 podprostory vektorového prostoru V, jsou jeho podprostory také množiny $W_1 \cap W_2$ a $W_1 \cup W_2$? Ověřte na uvedených příkladech:

a) $W_1 = \{[x, y] \in R^2;\ y = 2x\}$, $W_2 = \{[x, y] \in R^2;\ y = -x\}$,

b) $W_1 = \{[x, y, z] \in R^3;\ y - z = 0\}$, $W_2 = \{[x, y, z] \in R^3;\ y + z = 0\}$,

c) $W_1 = \{[r, 2r, 3r]; r \in R\}$, $W_2 = \{[2s + t, s - t, 3s + t], s, t \in R\}$.

Příklad 9: Určete dimenzi $W_1 \cap W_2$ jestliže:

a) $W_1 = [(1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 0)]$, $W_2 = [(-3, 0, 2, 2), (-3, -5, 2, 7)]$,

b) $W_1 = [(1, 2, 2, 3), (2, 0, 1, 1)]$, $W_2 = [(-3, 14, 9, 16), (2, 3, 1, 0)]$.

Příklad 10: Určete dimenzi vektorového prostoru
$V = [\{(1, 1, 0, 2, 3), (2, -1, 1, 2, 3), (-1, 0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, -1, 0)\}]$. Pokud to jde, vytvořte jeho bázi tak, aby obsahovala vektor $(-4, 1, 1, 0, 1)$.

Příklad 11: Sestrojte příklad vektorového prostoru V a jeho podprostorů W_1 a W_2 tak, aby $W_1 \cup W_2 = W_1 \bigvee W_2$.